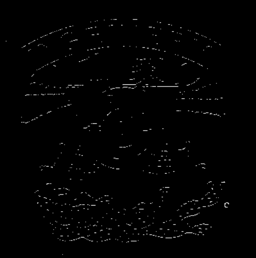
Cuadernode ejercicios

Dinámica

Hugo Germán
Serrano Miranda

Bertha
Franco Rosas

Yukihiro
Minami Koyama



Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas

$40.00

CUADERNO DE EJERCICIOS

DINÁMICA

Hugo Germán Serrano Miranda
Bertha Franco Rosas
Yukihiro Minami Koyama

PRESENTACIÓN

La Facultad de Ingeniería ha decidido realizar una serie de ediciones provisionales de obras recientemente elaboradas por académicos de la institución, como material de apoyo para sus clases, de manera que puedan ser aprovechadas de inmediato por alumnos y profesores. Tal es el caso de la obra *Cuaderno de ejercicios de dinámica* elaborada por los maestros Hugo Germán Serrano Miranda, Bertha Franco Rosas y Yukihiro Minami Koyama.

Se invita a los estudiantes y profesores a que comuniquen a los autores las observaciones y sugerencias que mejoren el contenido de la obra, con el fin de que se incorporen en una futura edición definitiva.

PRÓLOGO

El propósito fundamental de esta serie de ejercicios es el de brindar un apoyo al trabajo docente del profesor y adicionalmente, contribuir al aprendizaje de los alumnos que cursan la asignatura de Dinámica, la cual se imparte en el bloque de Ciencias Básicas, de los Planes de Estudios de las diferentes carreras de esta Facultad.

Dentro del estudio de la mecánica de Newton, muchos de los fenómenos que se estudian en las asignaturas de Estática y de Cinemática constituyen casos particulares de la Dinámica, por lo que en esta disciplina se requiere de criterios y procedimientos de análisis generales para abordar su objeto de estudio. En este sentido, la habilidad para analizar, plantear y resolver problemas es fundamental.

El diseño de los ejercicios aquí presentados, tiene la firme intención de promover en el alumno nuevas actitudes y exigencias en la formulación conceptual de modelos, tanto gráficos como matemáticos, que propicien una adecuada interpretación física de los fenómenos y eviten, en la medida de lo posible, el uso irracional de fórmulas que conducen a la práctica de procedimientos rígidos y memorísticos. Es decir, que al presentar un material didáctico potencialmente significativo, éste se relacione con la carga previa cognitiva de cada uno de los alumnos, generando un intercambio y posteriormente una fusión de ideas que desemboque en el enriquecimiento del bagaje intelectual deseado.

Con el fin de propiciar en el alumno el desarrollo apropiado de las habilidades requeridas, adoptamos, con relación al manejo conceptual, estructura y organización de los ejercicios propuestos, el compromiso de presentar sólo aquellos que creemos, tienen el potencial para que el alumno adopte una actitud más participativa y constructiva en su aprendizaje.

Ciertamente, en su esencia, la mayoría de los problemas contenidos en este cuaderno constituyen ejercicios clásicos, cuyo manejo en clase es casi inevitable y difícil de omitir. Sin embargo, la forma en que se presentan difiere a la de las series de Dinámica y de Cinemática y Dinámica que anteceden a la presente, sobre todo en la intención de la formulación de preguntas . Además, consideré pertinente incluir en el último capítulo una serie de ejercicios de centros de masa y momentos de inercia, indispensables para abordar el aprendizaje de la dinámica del cuerpo rígido, a pesar de que dicho tema no está contenido en el programa de la asignatura y sí en Cinemática.

Quiero destacar la participación de mis compañeros de trabajo: Bertha Franco Rosas y Yukihiro Minami Koyama, cuyas aportaciones motivaron de manera significativa la reflexión y, en algunos casos, la corrección a mis ejercicios propuestos originalmente. Bertha estuvo a cargo de la revisión, análisis y resolución de los ejercicios, Yukihiro propuso casi todos los ejercicios resueltos que se presentan y contribuyó en gran medida a mejorar el aspecto técnico de la presentación. Con estas dos personas comparto la satisfacción de un trabajo conjunto y la corresponsabilidad de sus virtudes y defectos.

Intervino en la elaboración de los dibujos Teresa Romero Ocaranza, alumna de esta Facultad, a quien agradezco su valiosa colaboración.

Por último, quiero invitar a los profesores a que hagan uso de este material, pero sobre todo a los alumnos, que al hacerse copartícipes de su formación, contribuyen a cerrar el círculo del proceso enseñanza-aprendizaje. Las críticas y sugerencias que nos hagan llegar, servirán para mejorar en el futuro este trabajo.

Atentamente.
Hugo Serrano Miranda
2 de octubre de 2002

ÍNDICE

PRÓLOGO **2**

ÍNDICE **4**

SERIE I **5**
PARTÍCULA CON MOVIMIENTO RECTILÍNEO, ecuaciones de movimiento
EJERCICIOS RESUELTOS 18

SERIE II **22**
PARTÍCULAS CONECTADAS, ecuaciones de movimiento
EJERCICIOS RESUELTOS 29

SERIE III **31**
PARTÍCULA CON MOVIMIENTO CURVILÍNEO, ecuaciones de movimiento
EJERCICIOS RESUELTOS 44

SERIE IV **50**
PARTÍCULA, trabajo y energía cinética
EJERCICIOS RESUELTOS 61

SERIE V **66**
PARTÍCULA, impulso y cantidad de movimiento
EJERCICIOS RESUELTOS 72

SERIE VI **75**
SISTEMAS DE PARTÍCULAS
EJERCICIOS RESUELTOS 86

SERIE VII **90**
CUERPO RÍGIDO, ecuaciones de movimiento
EJERCICIOS RESUELTOS 104

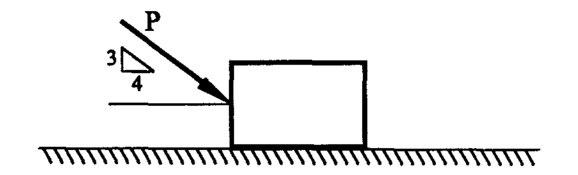
SERIE VIII **114**
CUERPO RÍGIDO, trabajo y energía e impulso y cantidad de movimiento
EJERCICIOS RESUELTOS 124

SERIE IX **144**
CENTROS DE MASA Y MOMENTOS DE INERCIA
EJERCICIOS RESUELTOS 155

RESPUESTAS **158**

SERIE I

PARTÍCULA CON MOVIMIENTO RECTILÍNEO



Ecuaciones de movimiento

1.1.-El bloque de la figura se suelta desde el reposo, sobre el plano inclinado y rugoso; después de soltarlo, se observa que la magnitud de la rapidez que adquiere justo al llegar a la parte inferior de dicho plano es de **2.45 m/s;** para estas condiciones, determine:

a).-el coeficiente de fricción cinética entre las superficies en contacto, y

b).-el tiempo que tarda en llegar al extremo inferior del plano

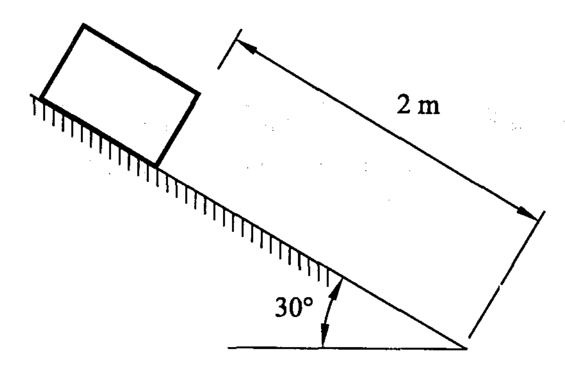


Figura I.1

1.2.-Una fuerza de magnitud y orientación constantes actúa sobre el bloque que se muestra en la figura; si la resultante que actúa sobre el bloque tiene una magnitud de **4 N**, se sabe que le produce una aceleración de **2.18 m/s^2** hacia la derecha y el coeficiente de fricción cinética entre las superficies en contacto vale 0.4, determine:

a).-la magnitud de la fuerza P, y

b).-el peso del cuerpo

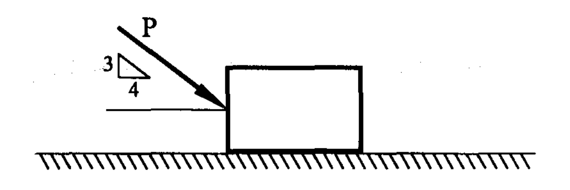


Figura I.2

1.3.-El bloque mostrado, de **2 kg** e inicialmente en reposo, está sometido a la acción de una fuerza **F de 20 N** de magnitud. Si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es 0.4, determine el valor de θ necesario para que el bloque recorra 2 m, en el menor intervalo de tiempo.

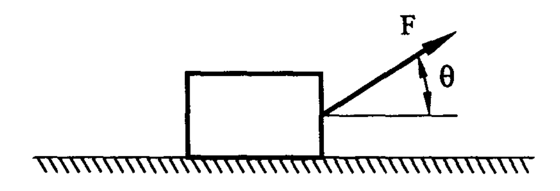


Figura I.3

1.4.-El bloque mostrado, se lanza hacia arriba del plano inclinado con rapidez inicial de **10 m/s**. Determine la rapidez del bloque después de **2 s** del momento de lanzamiento y la longitud recorrida, si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es:

a).-$\mu = 0.6$

b).-$\mu = 0.4$

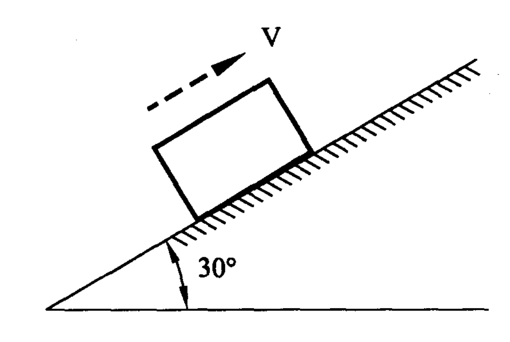


Figura I.4

1.5.-Un bloque de **40 N** de peso, inicialmente en reposo, se somete a la acción de una fuerza **P** cuyo comportamiento con respecto al tiempo se muestra en la figura I.5.2 . Si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es 0.2, determine la distancia que recorre el bloque en t = 3 s.

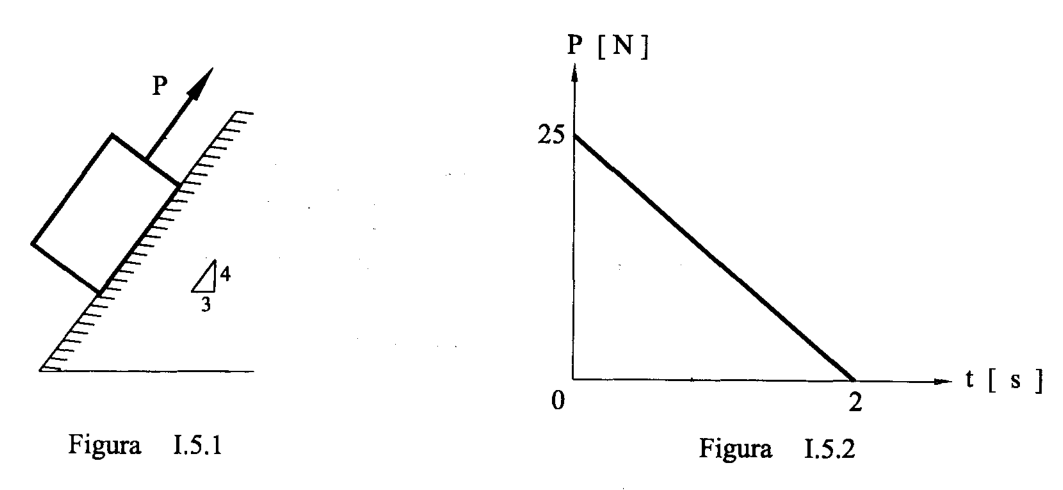


Figura I.5.1 Figura I.5.2

1.6.-Un bloque se suelta sobre un plano inclinado compuesto por dos materiales diferentes. El coeficiente de fricción entre él bloque y el primer tramo vale $\mu_1 = \mathbf{0.6}$ y entre el bloque y el segundo tramo μ_2, se desconoce; si después de soltar el bloque se observa que recorre una longitud de 4 m, con las proporciones indicadas, determine el coeficiente μ_2.

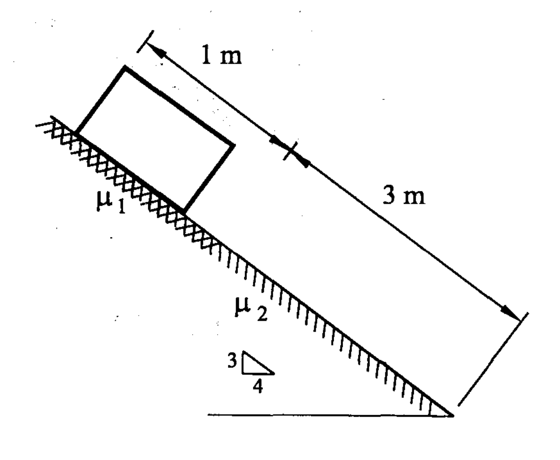


Figura I.6

1.7.-Una partícula de *2* **N** de peso, se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de **40 m/s**. Si la acción del aire ejerce una fuerza resistiva sobre la partícula directamente proporcional a la velocidad, dada por $\mathbf{F_r=0.1V}$ *N*, para **V** en m/s. Para estas condiciones, determine:

a).-la altura máxima que alcanza la partícula, y

b).-la velocidad con la que regresa al piso.

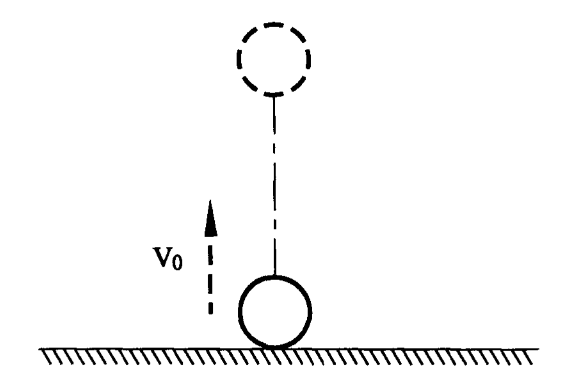


Figura I.7

1.8.-La caja mostrada, de **10 N** de peso, inicialmente en reposo en **x = 0 m,** está sometida a la acción de una fuerza horizontal cuya magnitud depende de la posición, tal como indica la figura I.8.2. Si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto vale **0.2,** determine:

a).-la rapidez de la caja en **x = 8 m,**

b).-la magnitud de la fuerza resultante que actúa sobre la caja para **x > 8 m,** y

c).-la longitud máxima recorrida por la caja.

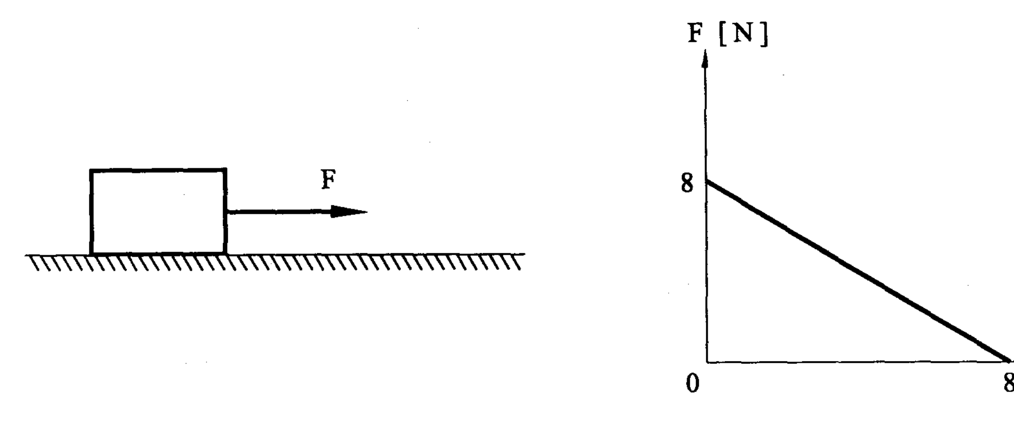


Figura I.8.1 **Figura I.8.2**

1.9.-Un bloque se lanza sobre un plano inclinado y rugoso, tal como se muestra en la figura; si después de haber transcurrido **1.18 s**, contados desde el momento en que fue lanzado, el bloque vuelve a pasar de regreso por la posición inicial y $\mu = 0.4$ entre las superficies en contacto, determine:

a).-la rapidez inicial v_0, y

b).-la altura máxima que alcanza.

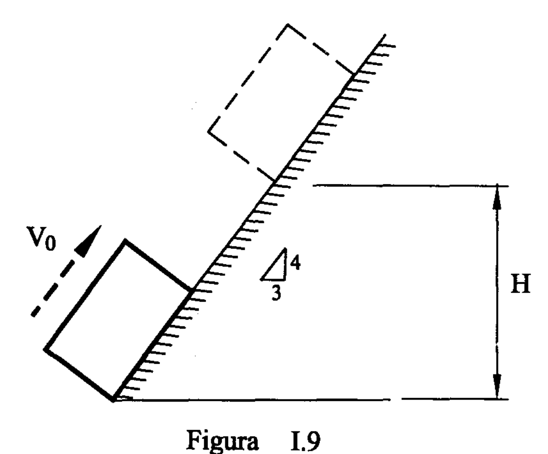


Figura I.9

1.10.-El bloque de **20 N** se somete a la acción de una fuerza ***F***, cuya magnitud depende del tiempo, según la figura I.10.2. Si en **t = 0 s**, el bloque se encuentra en reposo, y el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es **0.5**, determine la distanci***a*** recorrida por el cuerpo, desde que se inicia el movimiento hasta que se detiene.

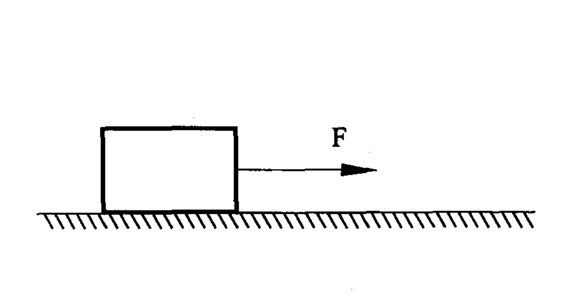


Figura I.10.1

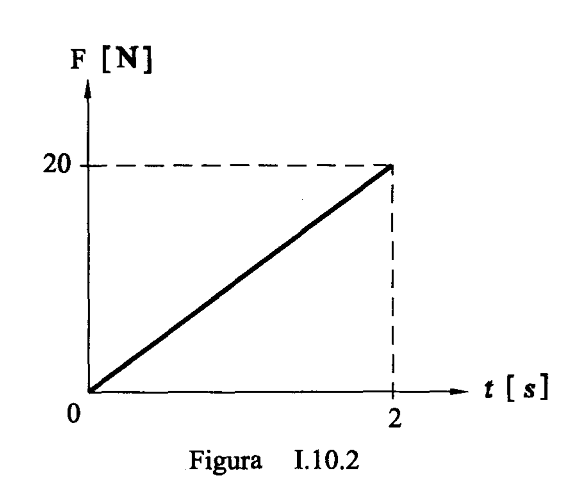


Figura I.10.2

1.11.- El bloque mostrado de 1 kg de masa, inicialmente en reposo, se somete a la acción de una fuerza ***F*** paralela al plano inclinado y de magnitud constante; dicha fuerza actúa temporalmente en el intervalo **[0,1] s** , moviendo al cuerpo hacia arriba del plano. Después de **1 s** la fuerza F es nula. La figura I.11.2 muestra el comportamiento de la rapidez del cuerpo en función del tiempo. Bajo estas condiciones, determine:

a).-el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto, y

b).-la magnitud de la fuerza F.

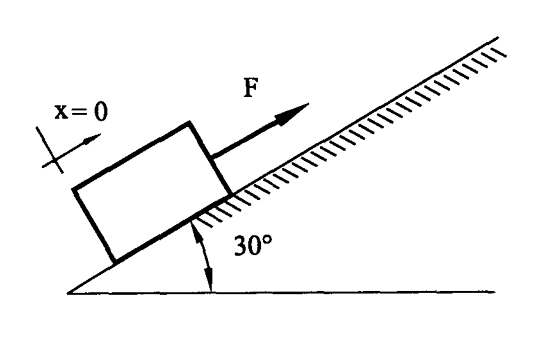


Figura I.11.1

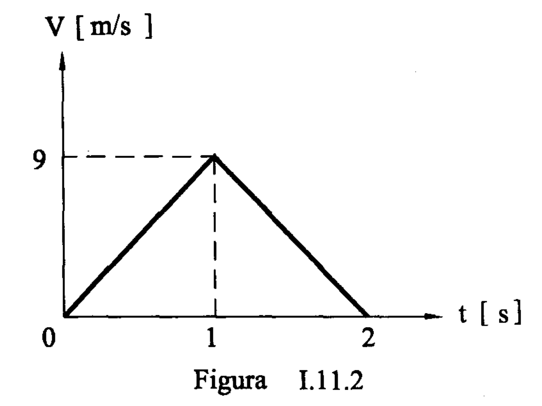


Figura I.11.2

1.12.-El bloque de **20 N** de peso se somete a la acción de una fuerza paralela al plano inclinado, cuya magnitud depende con el tiempo, según la figura I.12.2; si en **t** = **0 s** el bloque se encuentra en reposo y el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto vale **0.2,** determine su rapidez para **t** = **4 s**.

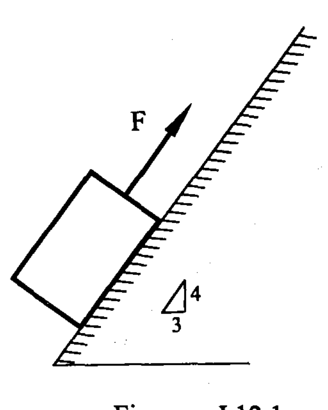


Figura I.12.1

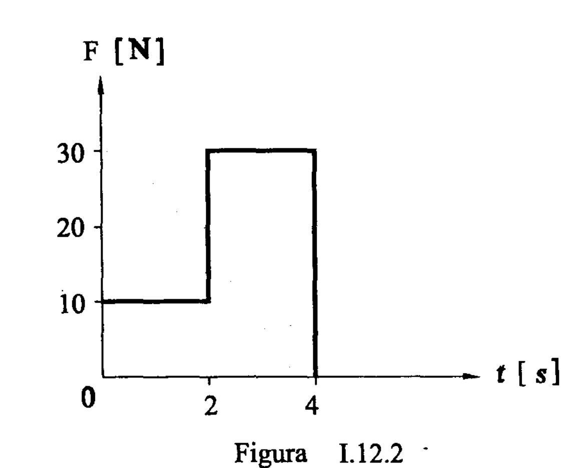


Figura I.12.2

1.13.-Para el problema anterior, obtenga la posición y la longitud total recorrida por el bloque en el instante en que vuelve a detenerse.

1.14.-El bloque mostrado de **20 N** de peso, inicialmente en reposo, se somete a la acción de una fuerza ***F*** paralela al plano inclinado, cuyo comportamiento se observa en la figura I.14.2. Si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es **0.4**, determine la magnitud de **Fo**, para que el bloque se detenga justamente en **t = 4 *s***.

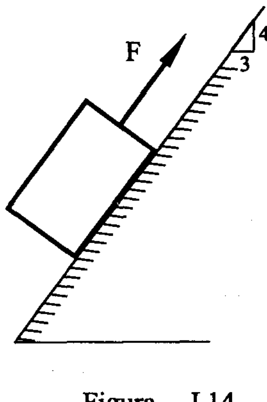


Figura I.14

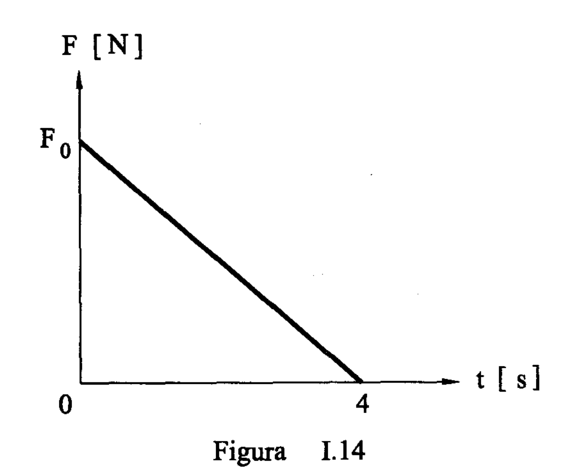


Figura I.14

1.15.-Para el problema anterior, con el valor de **Fo** obtenido, determine la máxima rapidez que alcanza el bloque y la longitud que recorre para ésta condición.

1.16 Una pequeña esfera se suelta desde el reposo, sobre un plano inclinado y rugoso de **2 m** de longitud. Posteriormente cae en el punto **B,** situado a **1.5 m** de profundidad y **0.95 m** a la derecha de A. Determine el coeficiente de fricción cinética entre las superficies en contacto.

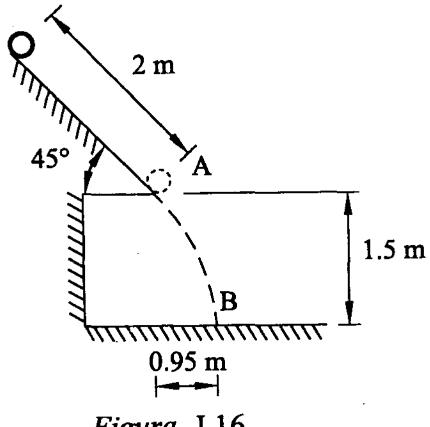


Figura I.16

I.17.-Los sistemas mecánicos que se muestran en la figura, tienen la misma masa; si se desplazan hacia abajo ambas masas una distancia *δ*, determine cuál deberá ser la relación existente entre los valores de $\mathbf{k_1}$ **y** $\mathbf{k_2}$ para que vibren con la misma frecuencia. ¿Cuál de los dos resortes es más duro?

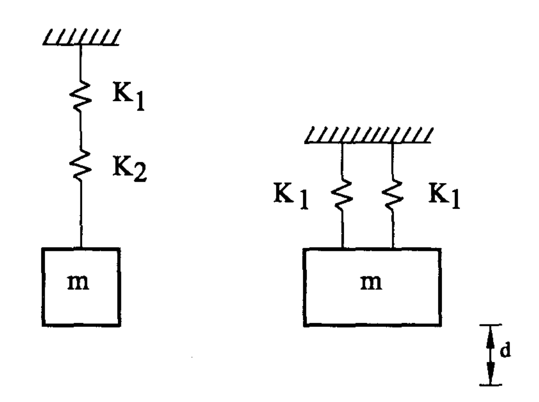


Figura I.17.1

I.18.-El modelo gráfico experimental que determina el comportamiento del resorte de la figura I.18.1 se muestra en la gráfica I.18.3; si del resorte se suspende una masa de **2 kg** y se va desplazando lenta y cuidadosamente hasta quedar en posición de equilibrio, determine:

a).-la constante ***K*** del resorte,

b).-la deformación *δ* del resorte, y

c).-si la masa se desplaza adicionalmente ***δ/2*** y luego se suelta, ¿cuál es la frecuencia de vibración?

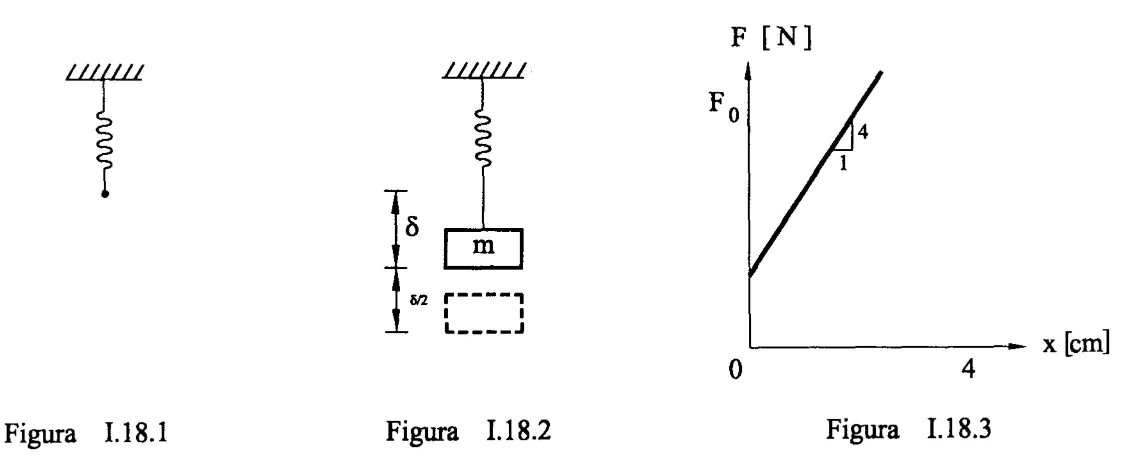


Figura I.18.1 **Figura I.18.2** **Figura I.18.3**

I.19.-Se suspende un bloque de peso **W** del extremo libre de un resorte lineal, tal como se muestra en la figura; posteriormente se va desplazando lenta y cuidadosamente hasta quedar en posición de equilibrio y con una deformación δ. Demuestre que el sistema masa-resorte al oscilar libremente, su frecuencia está dada por : $f = (g/\delta)^{1/2} (1/2\pi)$

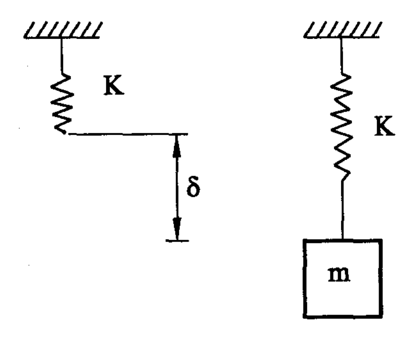


Figura I.19

I.20.-El sistema que se muestra está formado por un resorte y un amortiguador lineales, cuyas constantes son **100 N/m y 40 Ns/m**, respectivamente. Después de que el bloque se encuentra en su posición de equilibrio, se le desplaza verticalmente hacia abajo una longitud δ y luego se suelta. ¿Cuál deberá ser el valor de la masa **m**, para que el sistema vibre?

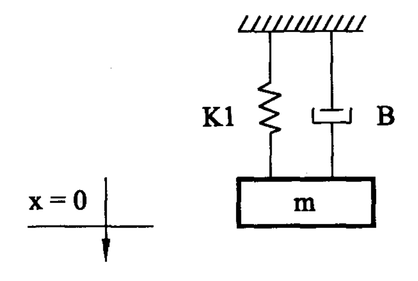


Figura I.20

I.21.-Un sistema masa-resorte-amortiguador se sujeta en la parte superior de un marco rectangular de madera, tal como se muestra en la figura. El sistema y su marco se dejan caer desde una altura de **20.4 cm** y después de chocar con el piso el marco no rebota. Considerando que en el momento en que el sistema se deja caer, la masa de **25 kg** se encuentra en su posición natural de equilibrio, **K = 1616 N/m y B = 40 Ns/m**, determine la mínima distancia **D** para que la masa no toque el marco, después de que éste ha chocado contra el piso.

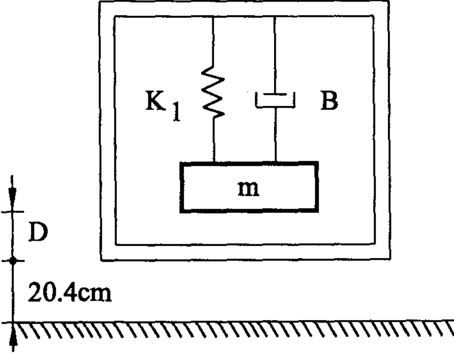


Figura I.21

I.22.-El comportamiento dinámico del sistema masa-resorte-amortiguador que se muestra en la figura, está determinado por la siguiente ecuación diferencial:

$$d^2x/dt^2 + 25dx/dt + 100x = 5sen(8\pi)t$$

si la masa **m = 2 kg**, determine los parámetros del sistema.

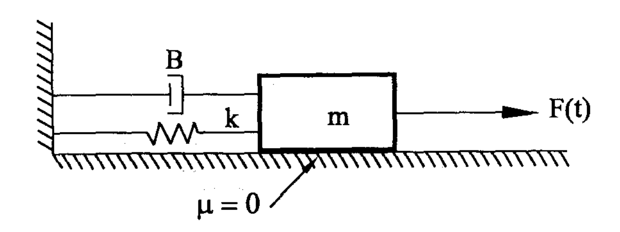


Figura I.22

I.23.-Con relación al problema anterior, si **m = 1 kg**, el comportamiento de la posición contra el tiempo es la que indica el gráfico anexo y F(t)= 0, determine los parámetros del amortiguador y del resorte.

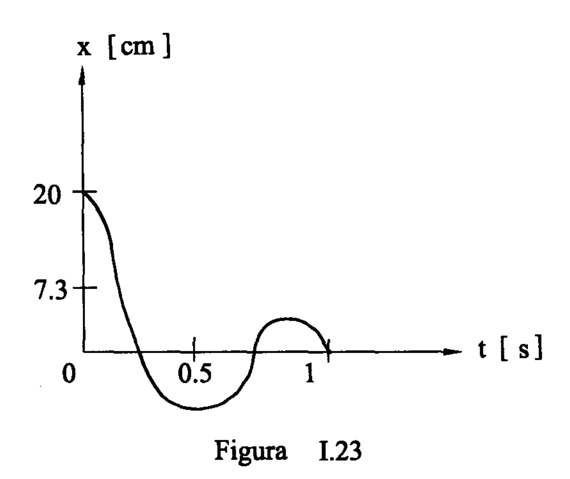


Figura I.23

1 Problema de movimiento rectilíneo de la partícula

Un cuerpo se lanza hacia arriba sobre un plano inclinado, con una rapidez inicial $\mathbf{v_0 = 20\ m/s}$ tal como se muestra en la figura. Si el cuerpo pesa $\mathbf{W = 20\ N}$ y el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es $\mu_k = \mathbf{0.5}$, determine la distancia recorrida por el cuerpo en $\mathbf{t = 4\ s}$.

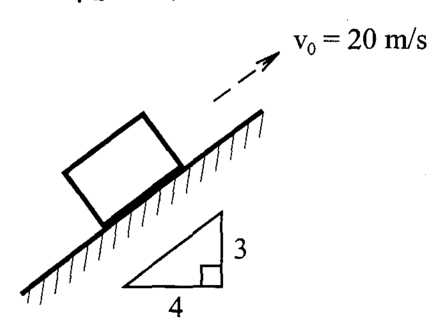
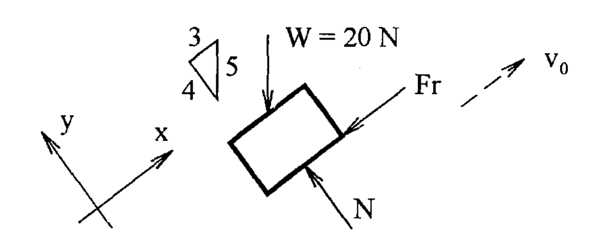


Diagrama de cuerpo libre



ΣF_x : $\quad -\frac{3}{5}(20) - Fr = \frac{20}{g}a$

ΣF_y : $\quad N - \frac{4}{5}(20) = 0$; $\qquad N = 16\ N$

dado que $F_r = \mu_k N$; $\qquad F_r = 8\ N$

$a = \frac{g}{20}(-12 - 8)$; $\qquad a = -g$

$\frac{dv}{dt} = -g$; $\qquad \int_{20}^{v} dv = \int_0^t -g\,dt$

$v - 20 = -gt$; $\qquad v = 20 - g\,t$

el cuerpo sube hasta que su rapidez se hace nula; por tanto, para $v_f = 0$ m/s:

$0 = 20 - g\,t$; $\qquad t = 2.041\ s$

$\frac{dx}{dt} = 20 - g\,t$; $\qquad \int_0^{x_f} dx = \int_0^{2.041} (20 - gt)dt$

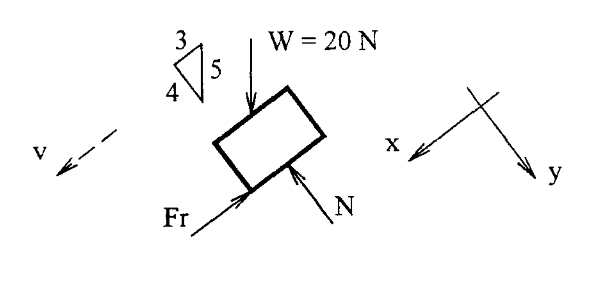
$$x_f = \left[20t - \tfrac{1}{2}gt^2\right]_0^{2.041};$$

$$x_f = 20(2.041) - \tfrac{1}{2}(9.8)(2.041)^2;$$

$$\boxed{x_f = 20.41\ \text{m}}$$

Luego de que se detiene en $t = 2.041$ s:

Diagrama de cuerpo libre



$$\Sigma F_x: \quad \tfrac{3}{5}(20) - Fr = \tfrac{20}{g}a$$

$$\Sigma F_y: \quad \tfrac{4}{5}(20) - N = 0; \qquad N = 16\ \text{N}$$

$$F_r = \mu_k N; \qquad F_r = 8\ \text{N}$$

$$a = \tfrac{g}{20}(12 - 8); \qquad a = 0.2\,g$$

$$\frac{dv}{dt} = -0.2g; \qquad \int_0^v dv = \int_0^t 0.2g\,dt$$

$$v = 0.2gt;$$

$$\frac{dx}{dt} = 0.2gt; \qquad \int_0^x dx = \int_0^t (20 - gt)dt$$

$$x_f = 0.1\,g\,t^2$$

dado que tardó **2.041 s** en subir, y volviendo a contar el tiempo desde que inicia el descenso, baja hasta $t = 1.959$ s, para completar los **4** s:

$$x_f = 0.1(9.8)(1.959)^2; \qquad \boxed{x_f = 3.761\ \text{m}}$$

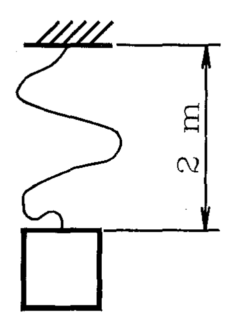
Por tanto, la distancia recorrida es:

$$\boxed{dist_T = 24.17\ \text{m}}$$

2 Problema de movimiento rectilíneo de la partícula

Un bloque de **5 kg** está sujeto a un cable elástico y de masa despreciable con **5 m** de longitud libre, y con una constante de rigidez de **k = 100 N/m,** y se suelta desde el reposo en la posición mostrada en la figura.

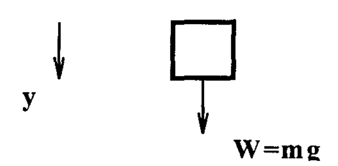
Determine la tensión máxima que debe soportar el cable.



Resolución

El bloque se mueve en el intervalo $2 \le y \le 5\ \mathbf{m}$ en caída libre, y para $y > 5\ \mathbf{m}$ actúa el cable como resorte.

Diagrama de cuerpo libre para $2 \le y \le 5\ \mathbf{m}$



ΣF_y: $mg = ma$

para $t = 0$ s, $y_0 = 2$ m y $v_0 = 0$ m/s, y dado que $a = v_y \dfrac{dv_y}{dy}$:

$$\int_0^{v_y} v_y\, dv_y = \int_2^5 g\, dy \ ; \qquad \tfrac{1}{2} v_y^2 = [g\,y]_2^5$$

$$v_y^2 = 2(9.8)(5-2)\ ; \qquad v_y^2 = 58.8\ ;$$

$$\boxed{v_y = 7.67\ \text{m/s}}$$

Luego, para el intervalo **y > 5 m:**

Diagrama de cuerpo libre para **y > 5 m**

pner y = 0

ky

y

W=mg

ΣF_y: $mg - ky = ma;$

Se considerará que en el punto natural de equilibrio del resorte (**pner**), **y = 0 m**. Por lo tanto, ahora para **y = 0 m**, $v_y = 7.67$ **m/s**, y dado que $a = v_y \dfrac{dv_y}{dy}$:

$$\int_{7.67}^{0} v_y \, dv_y = \int_0^{y_{max}} \left(g - \frac{k}{m}\right) dy \; ; \qquad \left[\tfrac{1}{2} v_y^2\right]_{7.67}^{0} = \left[g\,y - \frac{k}{2m} y^2\right]_0^{y_{max}}$$

El cable soportará la tensión máxima al tener el estiramiento máximo y_{max}, el cual sucede cuando el bloque se detenga por primera vez.

$$-\tfrac{1}{2}(7.67)^2 = 9.8\,y_{max} - \tfrac{100}{2(5)}\,y_{max}^2 - 0\,; \qquad -29.43 = 9.8\,y_{max} - 10\,y_{max}^2$$

$$10\,y_{max}^2 - 9.8\,y_{max} - 29.43 = 0\,; \qquad y_{max}^2 - 0.98\,y_{max} - 2.943 = 0$$

$$y_{max} = 0.49 \pm \sqrt{(0.49)^2 + 2.943}\,; \qquad y_{max} = 0.49 \pm \sqrt{3.184}$$

$$y_{max} = 0.49 + 1.784$$

$$\boxed{y_{max} = 2.275 \text{ m}}$$

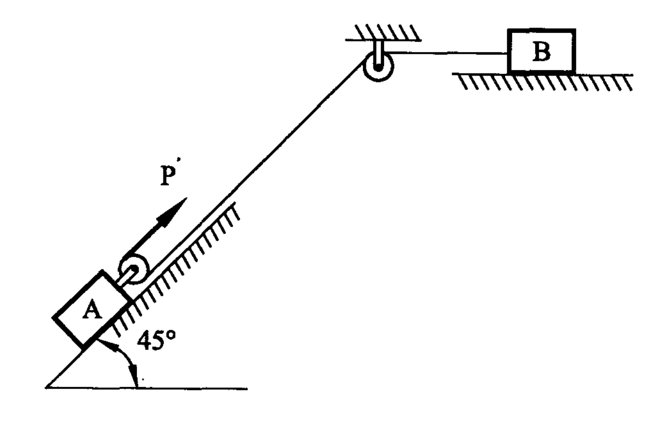
dado que $T_{max} = k\,y_{max}$:

$$T_{max} = 100\,(2.275)$$

$$\boxed{T_{max} = 227.5 \text{ N}}$$

SERIE II

PARTÍCULAS CONECTADAS



Ecuaciones de movimiento

II.1.-El sistema mecánico formado por los bloques **A** y **B**, de **300 y 200 N** de peso, respectivamente, unidos por una cuerda flexible, inextensible y de masa despreciable, que pasa por una pequeña polea fija y sin fricción, parte del reposo; si el coeficiente de fricción entre el bloque A y la superficie izquierda vale 0.2 y el plano inclinado derecho es liso, determine:

a).-la tensión en el cable

b).-la rapidez de B después de haber recorrido 2 m

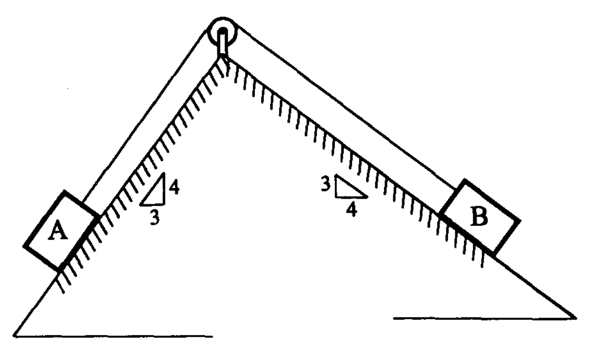


Figura II.1

II.2.- El sistema mecánico formado por los bloques **A** de **20 N** de peso y **B**, unidos por una cuerda flexible, inextensible y de masa despreciable, que pasa por una pequeña polea fija y sin fricción, parte del reposo; si el coeficiente de fricción entre el bloque A y la superficie horizontal vale 0.4, determine si es posible, el peso del bloque B, de tal forma que al descender 1 m , el bloque A adquiera una rapidez de 5 m/s . De no ser posible, explique la razón que corresponda.

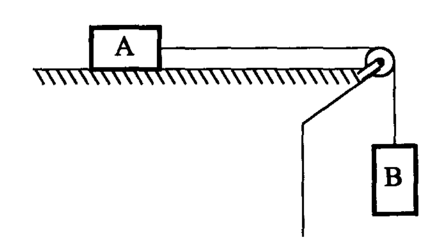


Figura II.2

II.3.- El sistema mecánico formado por los bloques **A** y **B** de **200 N y 100 N** de peso, respectivamente, unidos por dos cuerdas flexibles, inextensibles y de masa despreciable, que pasan por dos pequeñas poleas, una fija y otra móvil ambas sin fricción, parten del reposo; si el coeficiente de fricción entre el bloque A y la superficie horizontal vale 0.2, determine la magnitud de la fuerza P, para que la tensión en el cable que sostiene al cuerpo B sea:

a).-200 N

b).-70 N

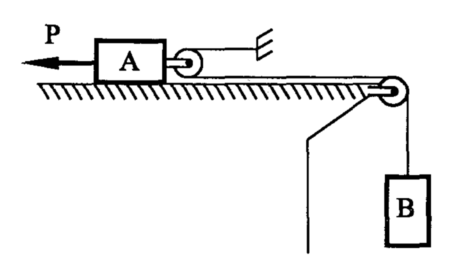


Figura II.3

II.4.-El sistema mecánico mostrado en el lado izquierdo, está formado por dos cuerpos **A** y **B** de **100 y 50 N** de peso, respectivamente, unidos por una cuerda flexible, inextensible y de masa despreciable que pasa por una pequeña polea fija y sin fricción. En tanto que el sistema del lado derecho está formado por un solo cuerpo **A de 100 N** de peso y una fuerza aplicada directamente a la cuerda. Determine, para el sistema mecánico del lado derecho, la magnitud de P, de tal forma que :

a).-la aceleración del bloque A sea la misma para cada sistema, y

b).-la aceleración de A del lado derecho, sea igual a la aceleración de B del lado izquierdo.

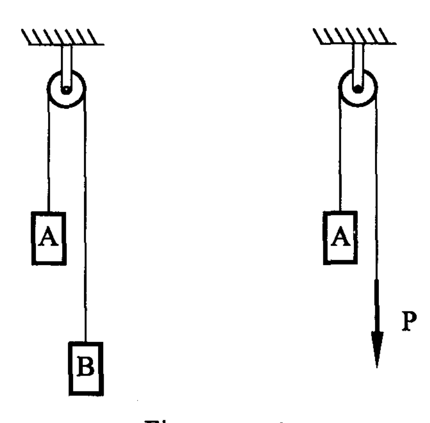


Figura II.4

II.5.-Con relación al problema II.3, determine para cada uno de los dos incisos, la rapidez del bloque **B,** en el momento de haber recorrido 2 m.

II.6.-El sistema mecánico, formado por tres bloques **A** y **B** de **100 y 200 N** de peso, respectivamente, y C. El bloque A descansa sobre B y el coeficiente de fricción estática entre sus superficies vale 0.4, en tanto que el coeficiente de fricción cinética entre B y el plano horizontal vale 0.2. Determine el máximo peso permitido al bloque C, para que al moverse el sistema, no ocurra deslizamiento relativo entre A y B.

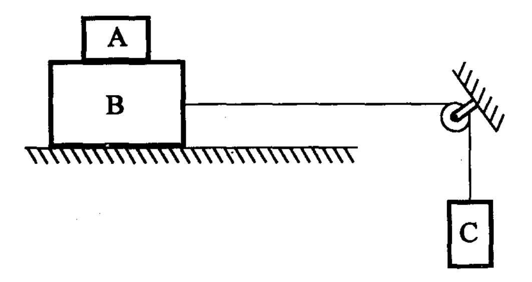


Figura II.6

II.7.- El sistema mecánico formado por los bloques **A** y **B** de **100 N y 40 N** de peso, respectivamente, unidos por una cuerda flexible, inextensible y de masa despreciable, que pasan por dos pequeñas poleas, una fija y otra móvil, ambas sin fricción, parten del reposo; si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto vale 0.5, determine las rapideces de los cuerpos A y B en t = 2 s, cuando la magnitud de la fuerza P sea:

a).-P = 30 N

b).-P = 10 N

Figura II.7

II.8.-Dos bloques **A** y **B**, del mismo peso e igual a **80 N**, están conectados por medio de una barra de peso despreciable, que en su parte media tiene un dinamómetro, como se muestra en la figura; después de soltar el sistema, se detecta por medio de la carátula del dinamómetro, que la barra está sujeta a una fuerza de 4.8 N de compresión. Si el coeficiente de fricción entre el plano y el bloque B vale 0.4, determine el coeficiente de fricción cinética entre el plano inclinado y el bloque A.

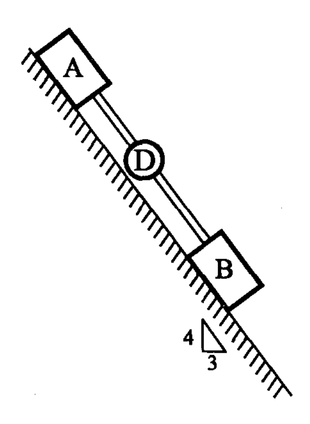


Figura II.8

II.9.-El esquema muestra el modelo mecánico simplificado de un elevador. El sistema está compuesto por dos cuerpos **A** (cabina) y **B** (contrapeso) y dos poleas, una fija y otra móvil; el contrapeso está sometido a la acción de una fuerza vertical F dirigida siempre hacia abajo, cuya magnitud determina la acción ya sea de subir, detener o bajar al elevador. Considerando al sistema inicialmente en reposo, los pesos de la cabina, el contrapeso y una persona que se encuentra dentro de ella son **4000, 1000 y 500 N,** respectivamente, determine la magnitud de la fuerza F, para que:

a).-el elevador ascienda con una aceleración de 2 m/s^2, y

b).-el elevador descienda con una aceleración de 2 m/s^2.

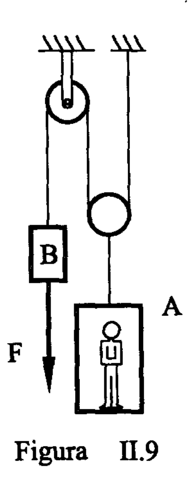


Figura II.9

II.10.-Con relación al problema anterior, si la persona se encuentra sobre una báscula de baño, ¿ cuál será el valor que registrará la báscula en los casos correspondientes a los incisos a) y b). Explique su resultado.

II.11.-El sistema mecánico que se muestra en la figura, está formado por dos bloques **A** y **B** de **400** y **300 N** de peso, respectivamente, que se unen mediante una cuerda flexible, inextensible y de m asa despreciable, que pasa por pequeñas poleas lisas. El coeficiente de fricción entre A y la superficie horizontal vale 0.2 y entre B y la misma superficie 0.4; determine el valor de la fuerza P para que el bloque A, adquiera una aceleración de 3 m/s^2 hacia la derecha.

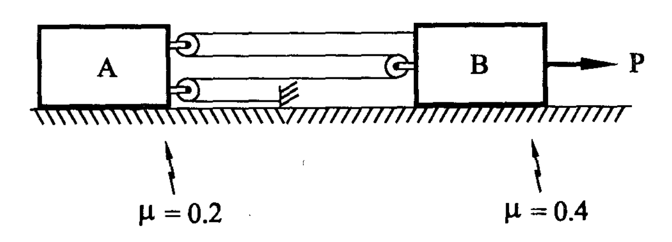
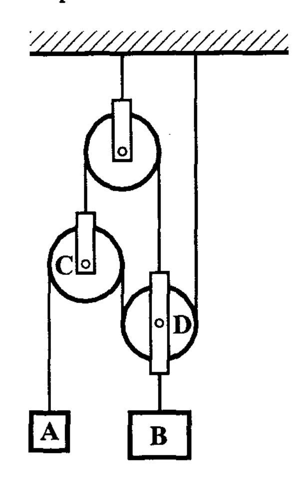
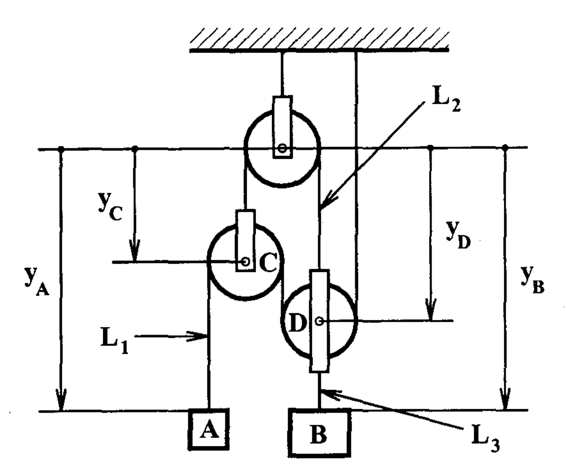


Figura II.11

3 Problema de dinámica rectilínea de la partícula: cuerpos conectados

Determine el valor de la masa del bloque **A** tal que la aceleración del bloque **B** sea hacia arriba con una magnitud de **1 m/s²**, si dicho bloque tiene una masa $\mathbf{m_B = 10\ kg}$, considerando que las poleas tienen masa y fricción despreciables, y la cuerda es flexible, inextensible y también de masa despreciable.





Análisis cinemático

$$L_1 = (y_A - y_C) + \frown + (y_D - y_C) + \smile + y_D + \mathrm{I}$$

derivando dos veces con respecto al tiempo:

$$0 = \ddot{y}_A - 2\,\ddot{y}_C + 2\,\ddot{y}_D\,, \qquad \ddot{y}_A = 2\,\ddot{y}_C - 2\,\ddot{y}_D \qquad (1)$$

de forma similar:

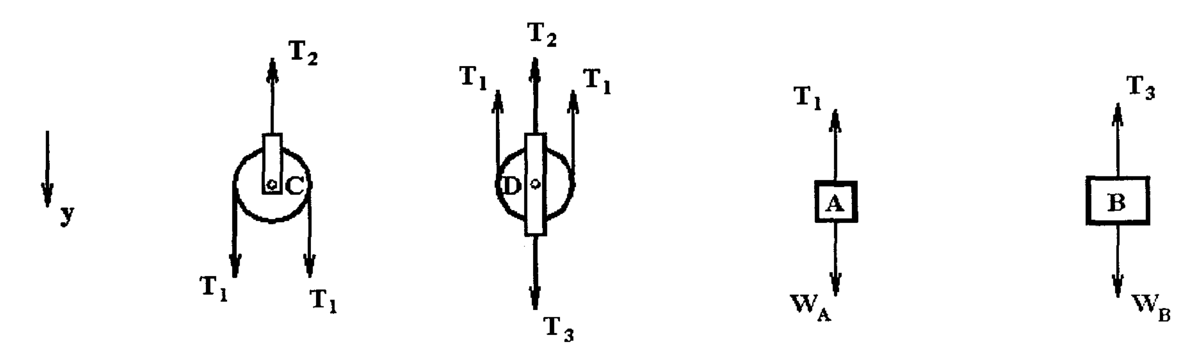
$$L_2 = y_C - \square + \frown + y_D - \square\,, \qquad \ddot{y}_C = -\ddot{y}_D \qquad (2)$$

$$L_3 = y_B - \square - y_D\,, \qquad \ddot{y}_B = \ddot{y}_D \qquad (3)$$

sustituyendo (2) y (3) en (1):

$$\ddot{y}_A = -4\,\ddot{y}_B \qquad (4)$$

Diagramas de cuerpo libre



$$2\,T_1 - T_2 = 0 \qquad (5)$$

$$T_3 - 2\,T_1 - T_2 = 0 \qquad (6)$$

$$W_A - T_1 = m_A \ddot{y}_A \qquad (7)$$

$$W_B - T_3 = m_B \ddot{y}_B \qquad (8)$$

dado que

$$\ddot{y}_B = -1\ m/s^2, \qquad \ddot{y}_A = 4\ m/s^2 \qquad (9)$$

y sustituyendo (5) y (6) en (8):

$$W_B - 4\,T_1 = m_B \ddot{y}_B, \qquad 10\,(9.8) - 4\,T_1 = 10\,(-1)$$

$$T_1 = 27\ N \qquad (10)$$

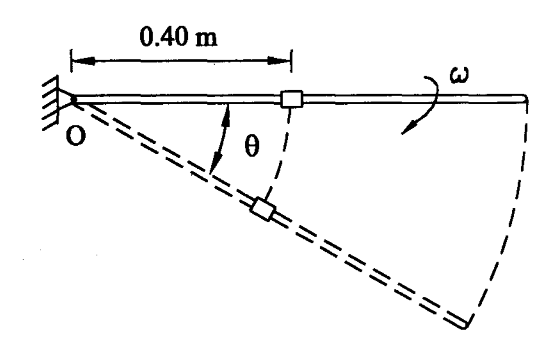
y finalmente, sustituyendo (9) y (10) en (7):

$$m_A(9.8) - 27 = m_A(4), \qquad 5.8\,m_A = 27$$

$$\boxed{m_A = 4.655\ kg}$$

SERIE III

PARTÍCULA
CON MOVIMIENTO CURVILÍNEO



Ecuaciones de movimiento

III.1.-El sistema mecánico que se muestra en la figura consta de una esfera de peso **W** sujeta al extremo de un hilo, un dinamómetro **D** intercalado entre el hilo que une a la esfera y el otro al extremo del hilo, sujeto al sistema tierra. El dinamómetro nos permite conocer la tensión en el hilo.

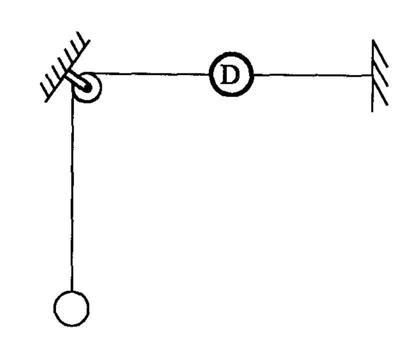


Figura III.1.1

A).-Si la esfera se encuentra suspendida, en estado de reposo y el hilo colocado verticalmente, la fuerza de tensión en el hilo vale :

a) T > W **b) T < W** **c) T = W**

B).-Si la esfera se desplaza hacia la izquierda, de tal forma que el hilo forme un ángulo θ con la vertical, tal como se muestra en la siguiente figura, al soltarla, se tiene un péndulo simple, el cual oscila con respecto a su posición de equilibrio.

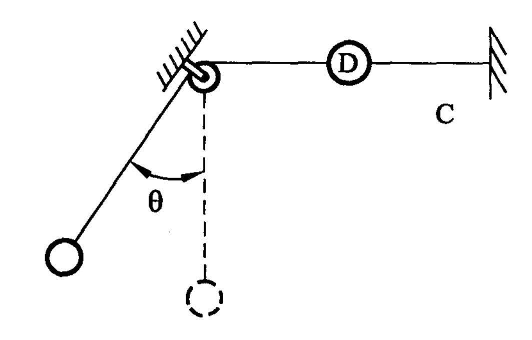


Figura III.1.2

La fuerza de tensión en el hilo al pasar la esfera por la posición de equilibrio vale :

a) T > W **b) T < W** **c) T = W**

C).-Si la respuesta a la pregunta anterior fué el inciso a), ¿porqué la esfera no se mueve hacia arriba, en el momento de pasar por la posición de equilibrio?.

Explique a qué se debe el incremento de la fuerza de tensión.

III.2.-Una barra de peso despreciable, articulada en " O ", se sujeta a una bola de acero de **40 N** de peso. La bola se mantiene en reposo por medio de un hilo horizontal O'P. Determine la fuerza de compresión en la barra:

a).-cuando el hilo mantiene la posición de reposo que se indica, y

b).-inmediatamente después de cortarse el hilo.

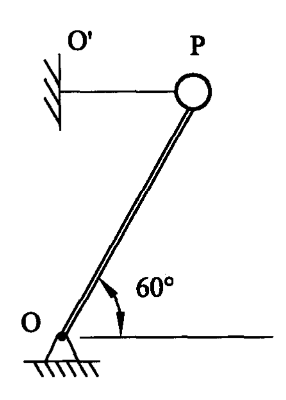


Figura III.2

III.3.-Un automóvil viaja sobre una superficie horizontal plana y pasa por el punto P de mayor curvatura de una curva, y en dicho punto se tiene que la curvatura vale **$k=0.0375$ m^{-1}**. Sobre el asiento del lado del conductor descansa un libro y considerando que el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es 0.6, determine:

a).-la máxima rapidez a la que puede pasar el automóvil por toda la curva, sin que deslice el libro sobre el asiento, y

b).-la aceleración total que experimenta el automóvil en el punto P.

III.4.-La partícula que se muestra en la figura pesa **20** N y se mueve sobre una superficie curva y rugosa localizada en un plano vertical; en la posición indicada se detallan las condiciones geométricas del centro de curvatura y su rapidez vale **2 m/s**. Si el coeficiente de fricción cinética entre las superficies en contacto vale 0.4, determine:

a).-la fuerza normal sobre la partícula,

b).-la aceleración total, y

c).-la rapidez de la partícula, ¿se incrementa o decrece ?

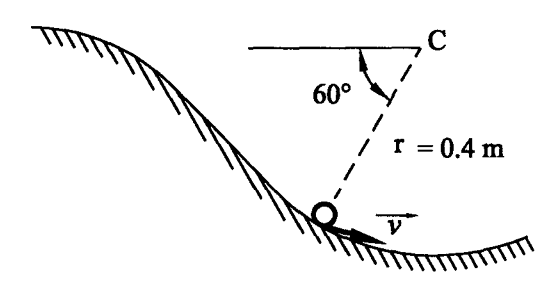


Figura III.4

III.5.-Para el péndulo simple mostrado, cuánto debe valer la rapidez de la partícula en dicha posición, para que la fuerza de tensión en el hilo sea igual a la magnitud de su peso; en estas condiciones ¿cuánto vale la aceleración total de la partícula?

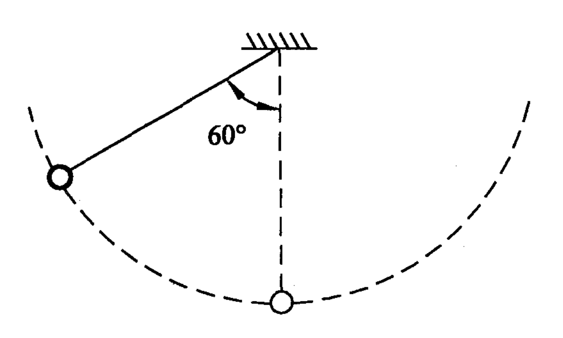


Figura III.5

III.6.-Una pequeña esfera de **20 N** de peso está atada a una cuerda de **2 m** de longitud y se mueve, describiendo una circunferencia, con rapidez uniforme de **5.42 m/s**. Determine :

a).-la tensión en la cuerda, y

b).-el ángulo ϕ que forma el hilo con la vertical.

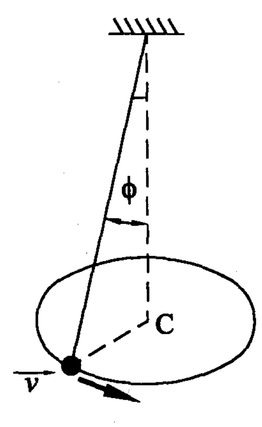


Figura III.6

III.7.-El dispositivo que se muestra en la figura consta de una varilla rígida que gira en torno a un eje fijo LL', con una rapidez constante ω. En los extremos de dicha varilla se suspenden, por medio de hilos, dos cuerpos de **20 N** de peso cada uno, los cuales giran junto con la varilla. Se pretende que al girar el sistema, los cuerpos no toquen las paredes verticales que están localizadas a sus lados. Determine :

a).-la máxima rapidez angular para evitar que esto suceda, y

b).-la tensión en los hilos.

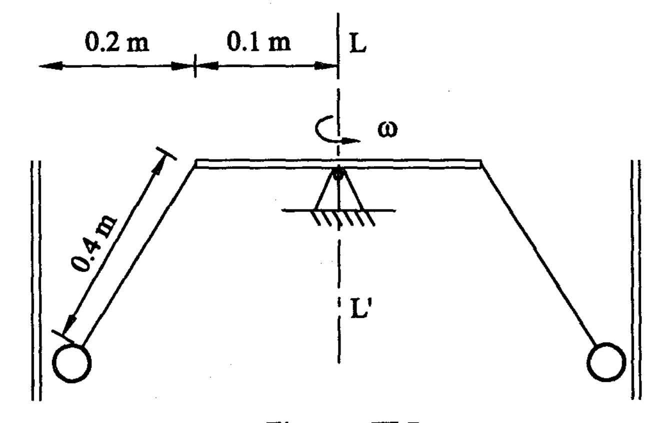


Figura III.7

III.8.-Un collarín de **10 kg** de masa está montado sobre una barra AB, la cual gira libremente respecto a un eje vertical EE' con rapidez angular ω_o; dicho collarín se encuentra en reposo respecto a la barra, a una distancia de 0.40 m del punto A. Si el coeficiente de fricción estática entre el collarín y la barra es 0.4, obtenga el rango de valores de ω_0 de la barra con el fin de que el collarín no deslice respecto a ella.

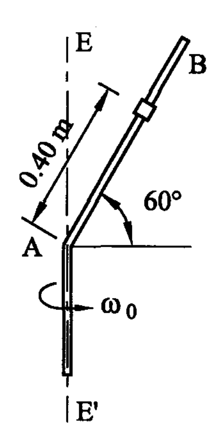


Figura III.8

III.9.-Un bloque inicia su movimiento desde el reposo, en la posición indicada del plano inclinado, que se une en el punto **P** a una trayectoria circunferencial de 1 m de radio. Al llegar el bloque a este punto, se detecta que la fuerza normal ejercida por la trayectoria sobre el bloque, se incrementa al doble del valor original que tenía en el plano inclinado. Si el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano inclinado vale 0.5, determine:

a).-la rapidez del bloque en el momento de llegar a P, y

b).-la longitud L que recorre sobre el plano.

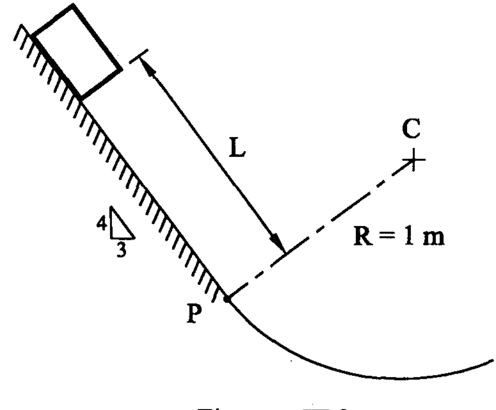


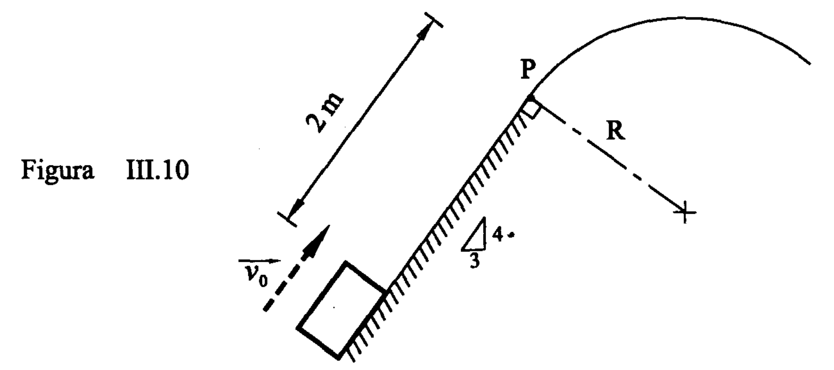
Figura III.9

III.10.-El bloque mostrado, se lanza hacia arriba de un plano inclinado rugoso con una rapidez inicial **Vo**; al llegar al punto P, el cual corresponde al inicio de una trayectoria circunferencial lisa de 0.80 m de radio, se observa que la fuerza normal en el bloque decrece a la cuarta parte del valor que tenía en el plano inclinado. Si el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano inclinado es 0.4, obtenga:

a).-el valor de Vo, y

b).-la magnitud de la aceleración total del bloque justo después de pasar por el punto P.

Figura III.10



III.11.-El dispositivo que se muestra en la figura, consta de un collarín que puede deslizar sobre una barra, que tiene la forma de una cuarta parte de la circunferencia de 0.20 m de radio. Dicho dispositivo puede usarse como un sistema de control de seguridad para velocidades angulares en máquinas rotatorias; ya que al girar la barra en torno a un eje fijo EE', el collarín empieza a deslizar sobre la varilla curva y el brazo de 0.10 m de longitud que está unido a él, puede accionar el interruptor eléctrico situado a la derecha. Despreciando todo efecto de fricción y considerando las dimensiones señaladas en el dibujo, obtenga el rango de valores de ω para el cual el brazo puede accionar la palanca.

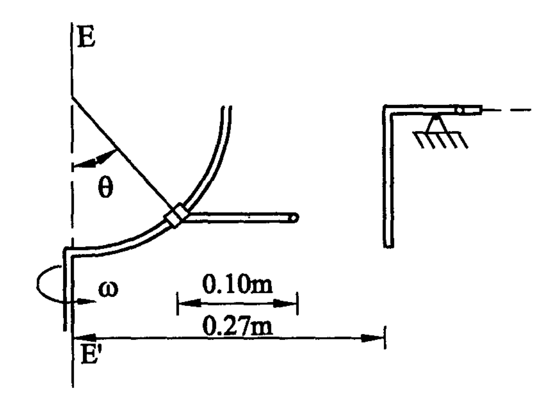


Figura III.11

III.12.-Una moneda de peso **W**, descansa sobre una plataforma localizada en un plano horizontal y que puede girar libremente, en torno a un eje fijo perpendicular a ella y que pasa por su centro; si la citada moneda se encuentra a una distancia ρ de su centro y el coeficiente de fricción estática entre las superficies en contacto es μ, demuestre que :

a).-la máxima aceleración angular constante α a la que puede iniciar su movimiento giratorio, sin que la moneda deslice, está dada por la expresión $\alpha_{\mathbf{máx}} = \mu g / \rho$, y

b).-una vez iniciado el movimiento con esta aceleración, el intervalo de tiempo para el cual la moneda permanece sobre la plataforma sin deslizar, está dado por:

$$\mathbf{0 < t < (\rho / \mu g)^{1/2}}$$

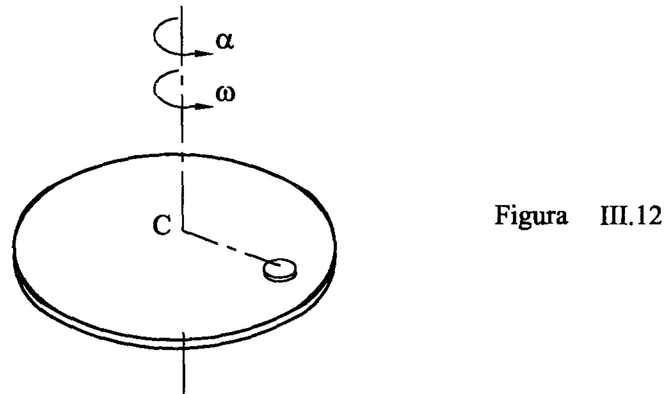


Figura III.12

III.13.-El collarín que se muestra en la figura, se encuentra montado sobre una varilla que se mueve en un plano vertical y gira en torno a una articulación fija "O", con una rapidez angular constante de **2.33 s^{-1}**. Si en la posición mostrada, la distancia del collarín a la articulación es de 0.40 m y el coeficiente de fricción estática entre la varilla y el collarín es **0.7,** obtenga el ángulo θ para el cual el collarín empezará a deslizar con relación a la varilla.

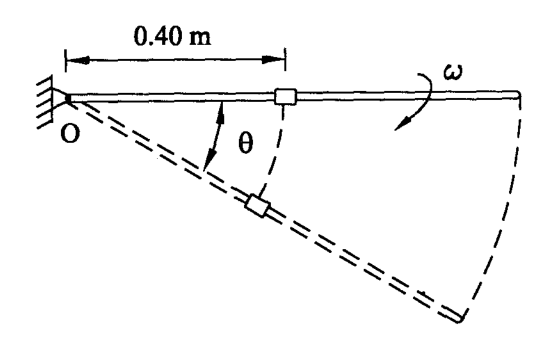


Figura III.13

III.14.-El sistema que se muestra en la figura consta de dos bloques unidos mediante una cuerda de longitud **L = a + b**, los cuales pueden moverse holgadamente a través de la ranura practicada al disco; por otra parte, el disco puede girar en un plano horizontal en torno a un eje vertical y que pasa por su centro.

Considerando que el coeficiente de fricción entre la ranura y los bloques vale 0.6, $\mathbf{W_1 = 20\ N}$ y $\mathbf{W_2 = 30\ N}$, obtenga la rapidez angular a la que empezarán a deslizar los bloques con relación al disco, así como también el sentido de movimiento, para :

a).-a = 20 cm	b).-a = 10 cm	c).-a = 18 cm
b = 10 cm	b = 20 cm	b = 10 cm

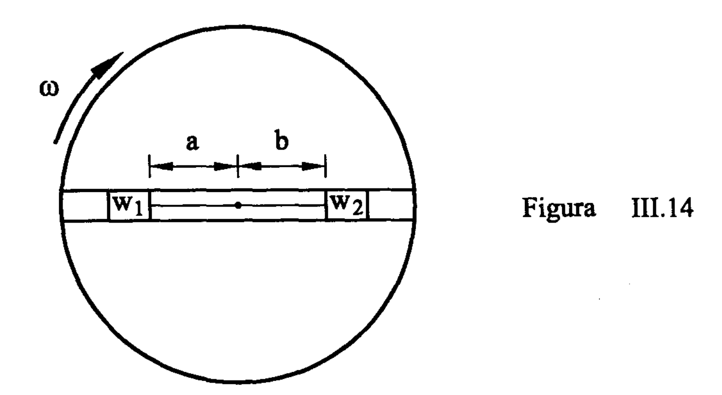


Figura III.14

III.15.-Se coloca un balín, sobre el borde de un disco liso de radio **R** y acanalado, en la posición que se muestra en la figura y posteriormente se suelta y se mueve en el borde del disco, hasta que lo abandona. Obtenga la expresión que determina la altura **H**, en función del radio R y el ángulo inicial ϕ_o para el cual el balín abandona la superficie del disco.

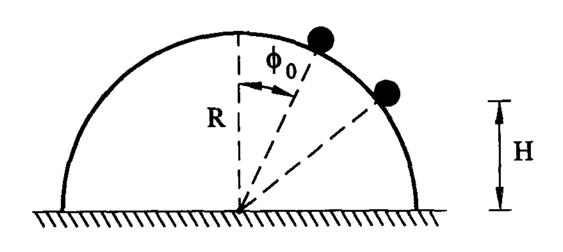


Figura III.14

III.16.-Un balín de peso **W**, inicia su movimiento desde el reposo sobre una canaleta semicircular vertical y lisa, en la posición que se muestra en la figura, cuando el radio-vector **R** forma un ángulo inicial ϕ_o. Determine, en función de estos parámetros:

a).-la aceleración tangencial del balín,

b).-la aceleración normal del balín, y

c).-el valor de la fuerza normal que se ejerce sobre el balín.

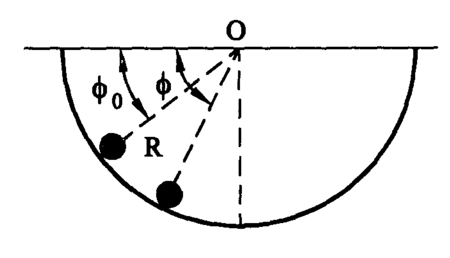


Figura III.16

III.17.-Con relación al problema anterior, considerando que el coeficiente de fricción cinética entre las superficies en contacto es μ, demuestre que la ecuación que rige el comportamiento cinemático del balín está dada por :

$$\omega \mathbf{d}\omega/\mathbf{d}\phi + \mu\omega^2 = (\mathbf{g/R})\ (\mathbf{cos}\phi\ \ -\mu\ \mathbf{sen}\phi\ )$$

III.18.-Un bloque descansa sobre una tabla lisa de 0.60 m de longitud, la cual gira en torno a un eje fijo perpendicular al plano vertical que pasa por O con una velocidad $\omega = \pi/4$ **rad/s**, constante y en sentido antihorario. En t = 0 s, la tabla se encuentra en posición horizontal y el bloque coincidiendo con el eje de rotación. Determine:

a).-el tiempo en el cual el bloque deja de estar en contacto con la tabla, y

b).-la rapidez del bloque justo cuando alcanza la condición anterior.

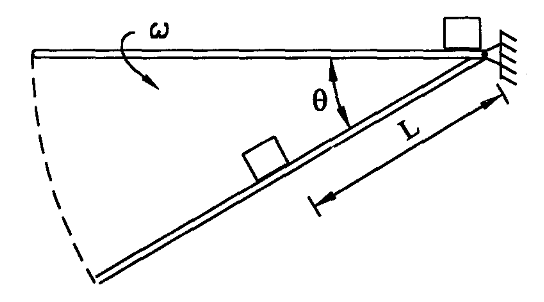


Figura III.18

111.19.-Una partícula de peso **W** se une al extremo libre de una cuerda elástica de longitud inicial L y de peso despreciable; la cuerda tiene un comportamiento elástico lineal acorde al modelo matemático de Hocke **F = kr**, donde r corresponde al incremento de longitud de la cuerda en m, F, la fuerza que se proporciona a la cuerda elástica y k la constante de elasticidad en N/m. Si la partícula se suelta desde el reposo en $\theta = \theta o$, como se observa en la figura, obtenga los modelos matemáticos que determinan el comportamiento dinámico de la partícula en términos de θ y r.

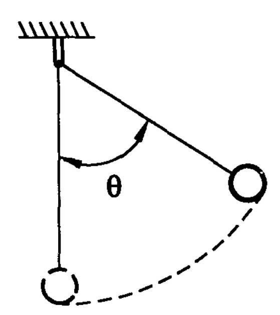


Figura III.19

III.20.-Sobre la periferia de un cilindro de radio a, que gira alrededor de su eje longitudinal, que es perpendicular al plano vertical mostrado, se enrolla un hilo delgado, inextensible y de masa despreciable, y de longitud inicial L. Si en el extremo de dicho hilo se coloca una partícula de peso **W**, el hilo no desliza sobre el cilindro y la partícula se suelta a manera de péndulo simple desde la posición $\theta = \theta o$, determine, en términos de parámetros conocidos:

a).-la posición angular del hilo, y

b).-la fuerza de tensión en el hilo.

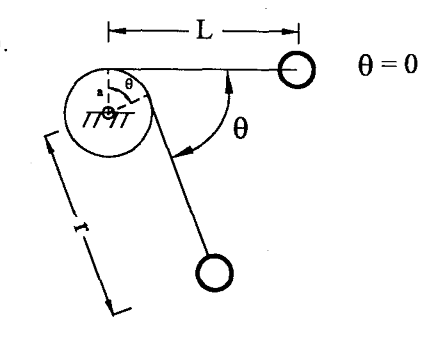


Figura III.20

III.21.-Con relación al problema anterior, suponga que el cilindro de radio a se coloca sobre un plano horizontal liso y gira respecto a su eje longitudinal, que ahora es vertical; a la partícula se le imprime una velocidad inicial de magnitud Vo y en la dirección perpendicular al hilo, como se muestra en la figura. Si se tienen las mismas condiciones iniciales del problema anterior,

a).-demuestre que la partícula se encuentra bajo la acción de un movimiento central, donde se cumple que $\theta\, r^2 = VoL =$ constante,

b).-obtenga las ecuaciones diferenciales que definen la posición angular del hilo, y

c).-la magnitud de la tensión en el hilo.

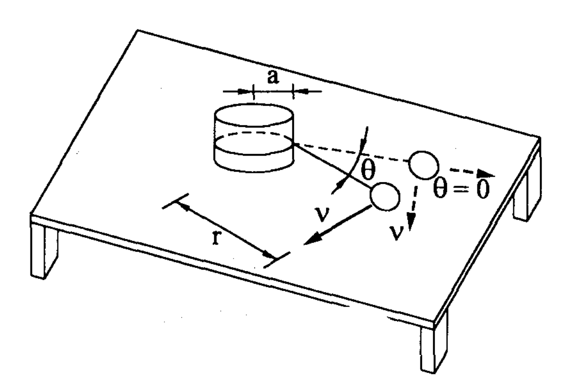


Figura III.21

III.22.-Por un orificio practicado en una superficie horizontal lisa, se hace pasar una cuerda delgada y de masa despreciable a la que en sus extremos se sujetan dos bloques de pesos **Wv y Wp**, como se indica en la figura. Si cuando t = 0s a **Wp** se le imprime una velocidad inicial Vo, perpendicular al segmento horizontal de la cuerda,

a).-demuestre que Wp se encuentra sometido a una fuerza central, y

b).-obtenga la ecuación diferencial que determina el comportamiento de L (r), en función de parámetros conocidos.

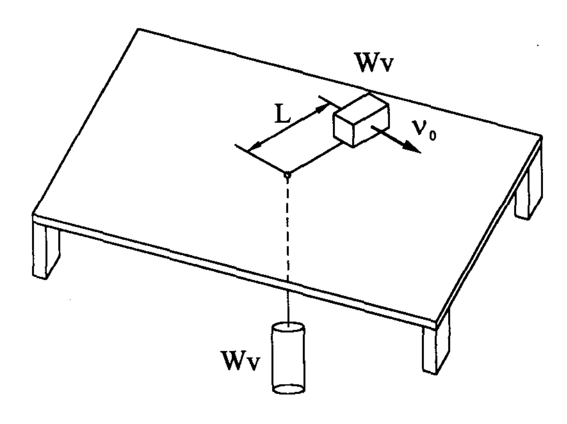
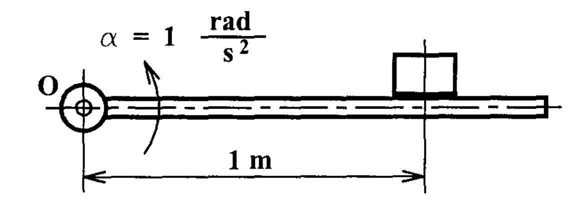


Figura III.22

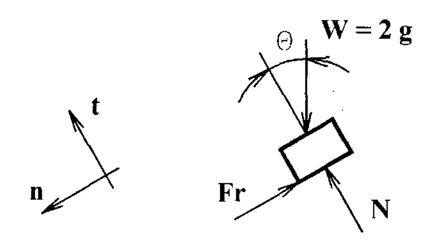
4 Problema de movimiento curvilíneo de la partícula: coordenadas intrínsecas

Una masa de **2 kg** descansa sobre una barra plana horizontal. La barra comienza a girar en el plano vertical alrededor de O con una aceleración angular constante de **1 rad/s²**. Se observa que la masa se desliza respecto a la barra cuando está a 30° arriba de la horizontal. ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática entre la masa y la barra? ¿La masa se desliza acercándose o alejándose de O?



Como la aceleración angular es pequeña, se considerará que el cuerpo tiende a moverse hacia abajo, sobre la barra.

Diagrama de cuerpo libre



$$\Sigma F_t: \quad N - 2\,g\cos\theta = m\,r\,\alpha$$

$$\Sigma F_n: \quad 2\,g\,\text{sen}\,\theta - Fr = m\,r\,\omega^2$$

dado que $\alpha = 1$ **rad/s²**:

$$\omega\frac{d\omega}{d\theta} = 1 \qquad\qquad \int_0^{\omega_1}\omega\,d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta$$

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 = \frac{\pi}{6} \qquad\qquad \omega = 1.023 \text{ rad/s}$$

para $\theta = 30°$:

$$N = 2\,(1)\,(1) + 2\,(9.8)\cos 30° \qquad\qquad N = 18.97 \text{ N}$$

$$Fr = \mu\,N \qquad\qquad Fr = 18.97\,\mu$$

entonces

$$2\,(9.8)\,\text{sen}\,30° - 18.97\,\mu = 2\,(1)\,\omega^2 \qquad\qquad 18.97\,\mu = 9.8 - 2.094$$

$$\boxed{\mu = 0.4062}$$

la masa se desliza acercándose a O.

5 Dinámica curvilínea de la partícula: coordenadas polares

Se emplea una varilla con corredera para forzar el movimiento de una partícula lisa **P**, que tiene una masa de **m = 1 kg**, a lo largo de la ranura vertical, tal como se muestra en la figura.

Calcule la fuerza de la varilla sobre la partícula y la fuerza normal de la ranura sobre la partícula cuando $\theta = 30°$, si se sabe que en dicho instante la varilla tiene una rapidez angular $\dot{\theta} = 2$ **rad/s** y una aceleración angular con magnitud $\ddot{\theta} = 1$ **rad/s²**, ambas con sentido antihorario. Suponga que la partícula sólo toca un lado de la ranura en cualquier instante.

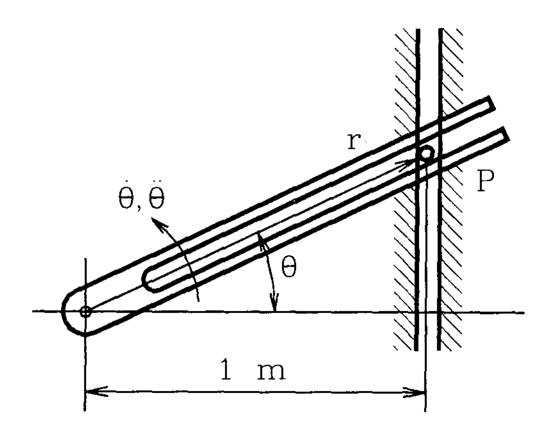
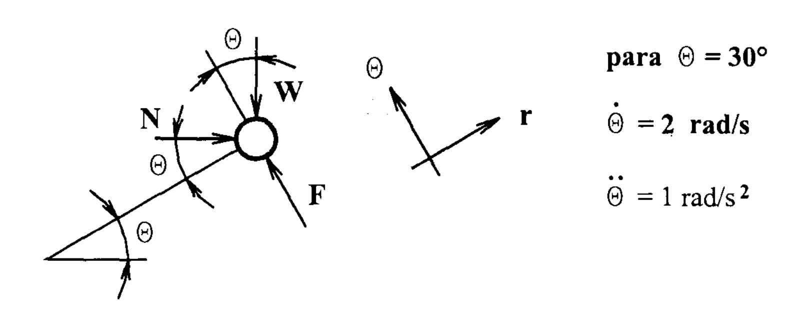
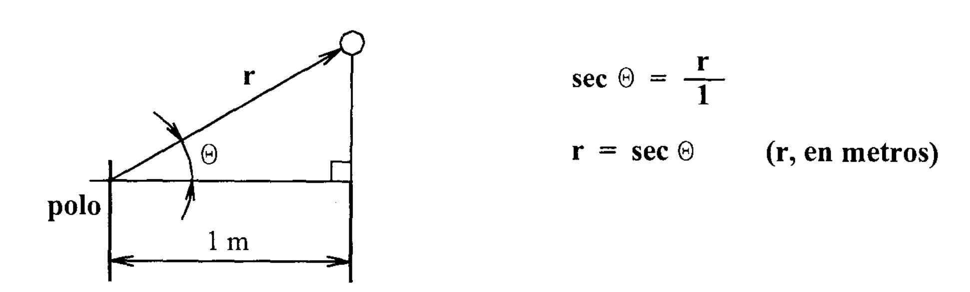


Diagrama de cuerpo libre



$$\Sigma F_r: \quad N\cos\Theta - W \operatorname{sen}\Theta = m(\ddot{r} - r\dot{\Theta}^2)$$

$$\Sigma F_\Theta: \quad F - N \operatorname{sen}\Theta - W\cos\Theta = m(r\ddot{\Theta} + 2\dot{r}\dot{\Theta})$$



$$\sec\Theta = \frac{r}{1}$$

$$r = \sec\Theta \qquad \text{(r, en metros)}$$

de donde

$$\dot{r} = \dot{\Theta} \sec \Theta \tan \Theta \qquad \text{(m/s)}$$

$$\ddot{r} = \dot{\Theta}^2 \sec^3 \Theta + \dot{\Theta}^2 \sec \Theta \tan^2 \Theta + \ddot{\Theta} \sec \Theta \tan \Theta \qquad \text{(m/s}^2\text{)}$$

para $\Theta = 30°$, $\dot{\Theta} = 2$ rad/s y $\ddot{\Theta} = 1$ rad/s^2:

$$r = \sec 30°; \qquad r = 1.155 \text{ m}$$

$$\dot{r} = 2 \sec 30° \tan 30°; \qquad \dot{r} = 1.333 \text{ m/s}$$

$$\ddot{r} = (2)^2 \sec^3 30° + (2)^2 \sec 30° \tan^2 30° + (1) \sec 30° \tan 30°$$

$$\ddot{r} = 8.365 \text{ m/s}^2$$

$$N \cos 30° - 9.8 \text{ sen } 30° = (1) [\, 8.365 - (1.155)(2)^2 \,]$$

$$0.866\, N - 4.9 = 3.745$$

$$N = \frac{3.745 + 4.9}{0.866};$$

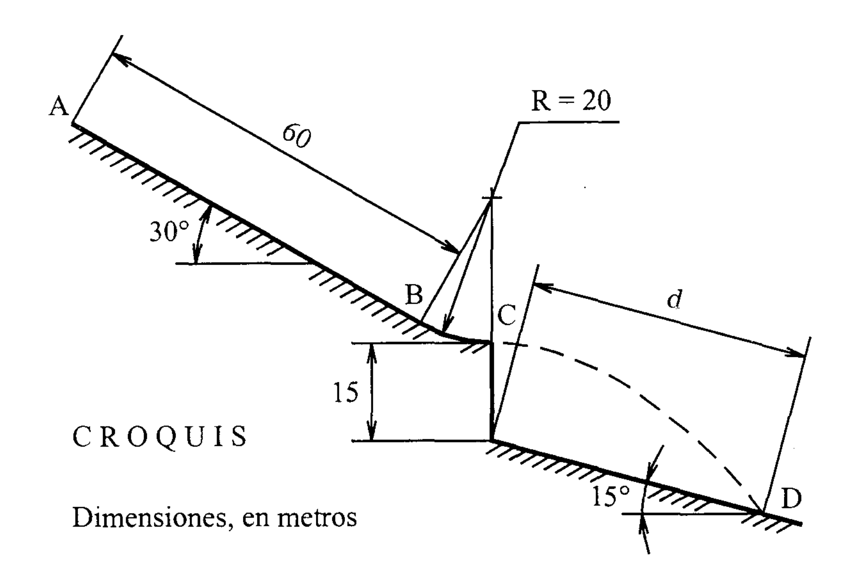
N = 9.983 N

$$F - N \text{ sen } 30° - 9.8 \cos 30° = (1) [\, (1.155)(1) + (2)(1.333)(2) \,]$$

$$F = 6.488 + (9.983)(0.5) + (9.8)(0.866)$$

F = 19.97 N

El salto con esquís es uno de los eventos más espectaculares entre los deportes invernales. En el croquis se muestra, en corte longitudinal, una aproximación de cómo podría ser la instalación de una rampa para dicho salto.



Se da por hecho que la fricción entre los esquís y la nieve es despreciable y que la resistencia viscosa del aire, sólo en el tramo de A a B, está dada por la expresión $\mathbf{F_D = 0.24\ v^2}$, donde la fuerza de resistencia, $\mathbf{F_D}$, está en **N** para una rapidez, **v**, en **m/s** (en el tramo de B a D se considera que no existe resistencia del aire).

Si el esquiador con **80 kg** de masa parte del reposo en A, y hace el salto sin impulsarse en el punto de despegue C, determine qué distancia **d**, en metros, es la que saltaría.

Para el tramo de A a B:

diagrama de cuerpo libre

ΣF_x: $W \text{ sen } 30° - 0.24\, v_x^2 = m\, a_x$

ΣF_y: $N - W \cos 30° = 0$

$$v_x \frac{dv_x}{dx} = 4.9 - 0.003\, v_x^2 \, ; \qquad \int_0^{v_{x,B}} \frac{v_x\, dv_x}{4.9 - 0.003\, v_x^2} = \int_0^{60} dx$$

$$\left[\frac{1}{-0.006} L(4.9 - 0.003\, v_x^2) \right]_0^{v_{x,B}} = 60 \, ; \qquad L(4.9 - 0.003\, v_{x,B}^2) - L(4.9) = -0.36$$

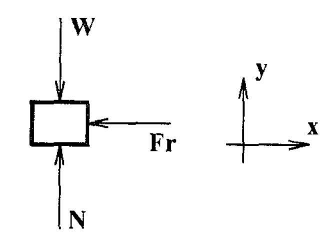
$$\exp\left(L(4.9 - 0.003\, v_{x,B}^2)\right) = \exp(-0.36 + 1.589)$$

$$4.9 - 0.003\, v_{x,B}^2 = 3.4186\,; \qquad v_{x,B}^2 = \frac{1.4814}{0.003}$$

$$v_{x,B}^2 = 493.8\,; \qquad v_{x,B} = 22.22 \text{ m/s}$$

Para el tramo de B a C:

diagrama de cuerpo libre



dado que $-30° \leq \Theta \leq 0°$, y $\text{sen}(-\Theta) = -\text{sen}\,\Theta$

$$\Sigma F_t: \quad -W\,\text{sen}\,\Theta = m\,\alpha\,r$$

$$\Sigma F_y: \quad N - W\cos\Theta = m\,\omega^2\,r$$

ya que $v_{x,B} = 22.22$ m/s:

$$\omega_B = \frac{22.22}{20}\,; \qquad \omega_B = 1.111 \text{ rad/s}$$

$$20\,\omega\frac{d\omega}{d\Theta} = -9.8\,\text{sen}\,\Theta\,; \qquad \int_{1.111}^{\omega_C} \omega\,d\omega = \int_{-30°}^{0°} (-0.49\,\text{sen}\,\Theta)\,d\Theta$$

$$\left[\tfrac{1}{2}\omega^2\right]_{1.111}^{\omega_C} = \left[0.49\cos\Theta\right]_{-30°}^{0°}\,; \qquad \omega_C^2 - 1.234 = 0.98\,(1 - 0.866)$$

$$\omega_C^2 = 0.1313 + 1.234\,; \qquad \omega_C = 1.1685 \text{ rad/s}$$

por lo que

$$v_{x,C} = \omega_C\, r; \qquad v_{x,C} = 23.37 \text{ m/s}$$

Y finalmente para el tramo de C a D, el movimiento es un tiro parabólico:

diagrama de cuerpo libre



$$\Sigma F_x: \quad 0 = m\,a_x$$

$$\Sigma F_y: \quad -W = m\,a_y$$

en el punto C la velocidad únicamente tiene componente horizontal, por lo que $v_{y,C} = 0$, y se considerará que el origen del sistema coordenado se encuentra en el punto C:

$$\frac{dv_y}{dt} = -g\,; \qquad \int_0^{v_y} dv_y = \int_0^t -g\,dt$$

$$v_y = -g\,t; \qquad \frac{dy}{dt} = -9.8\,t$$

$$\int_0^y dy = \int_0^t -9.8t\,dt; \qquad y = -4.9\,t^2$$

y con respecto al eje x:

$$\frac{dv_x}{dt} = 0; \qquad \int_{23.37}^{v_x} dv_x = \int_0^t 0\,dt$$

$$v_x - 23.37 = 0; \qquad v_x = 23.37 \text{ m/s}$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t 23.37\,dt; \qquad x = 23.37\,t$$

sustituyendo esta última expresión en la de **y(t)**:

$$y = -4.9\left(\frac{x}{23.37}\right)^2; \qquad 111.5\,y = -x^2$$

para determinar el punto D, se requiere encontrar la intersección de la parábola arriba determinada con la recta con ángulo con el plano horizontal de 15°, y cuya ecuación es:

$$y = -\tan 15°\,x - 15; \qquad y = -0.26795\,x - 15$$

por lo tanto:

$$111.5\,(-0.26795\,x - 15) = -x^2; \qquad -29.88\,x - 1672.5 = -x^2$$

$$x^2 - 29.88\,x - 1672.5 = 0; \qquad x = 14.94 + \sqrt{(14.94)^2 + 1672.5}$$

$$x = 14.94 + 43.54; \qquad x = 58.48 \text{ m}$$

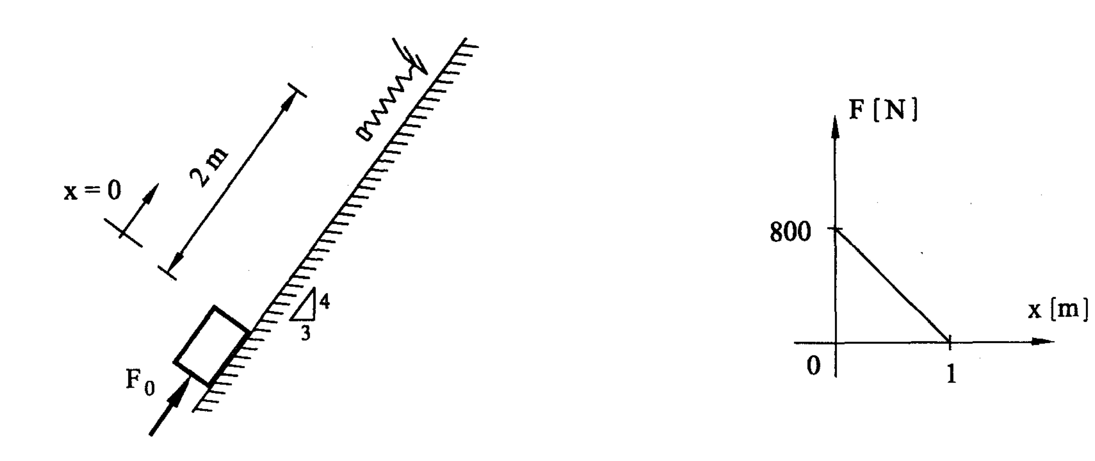
y por consiguiente·

$$\cos 15° = \frac{x}{d}; \qquad d = \frac{58.48}{0.9659}$$

$$\boxed{d = 60.54 \text{ m}}$$

SERIE IV

PARTÍCULA



Trabajo y Energía cinética

IV.1.-Un bloque de **20 N** de peso, se lanza con una rapidez Vo = 7 m/s sobre un plano inclinado y rugoso, hacia el extremo libre de un resorte lineal, tal como se muestra en la figura. El resorte tiene una constante de elasticidad **K = 1200 N/m** y el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto vale 0.5, obtenga:

a).-el valor de la deformación máxima que sufre el resorte, y

b).-la energía cinética del bloque, en el momento de pasar nuevamente por la posición de lanzamiento.

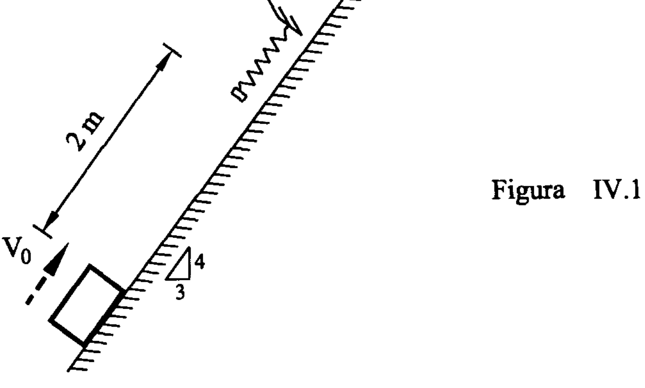


Figura IV.1

IV.2.-Un cuerpo de **100 N** de peso inicialmente en reposo, se somete a la acción de una fuerza paralela al plano, cuyo comportamiento en función de la posición se muestra en la gráfica IV.2.2; si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto vale 0.5 y la constante del resorte es **K = 7800 N/m**, obtenga:

a).-la rapidez del bloque al momento de tocar el resorte, y

b).-el trabajo total realizado por la fuerza del resorte, durante el ascenso del cuerpo.

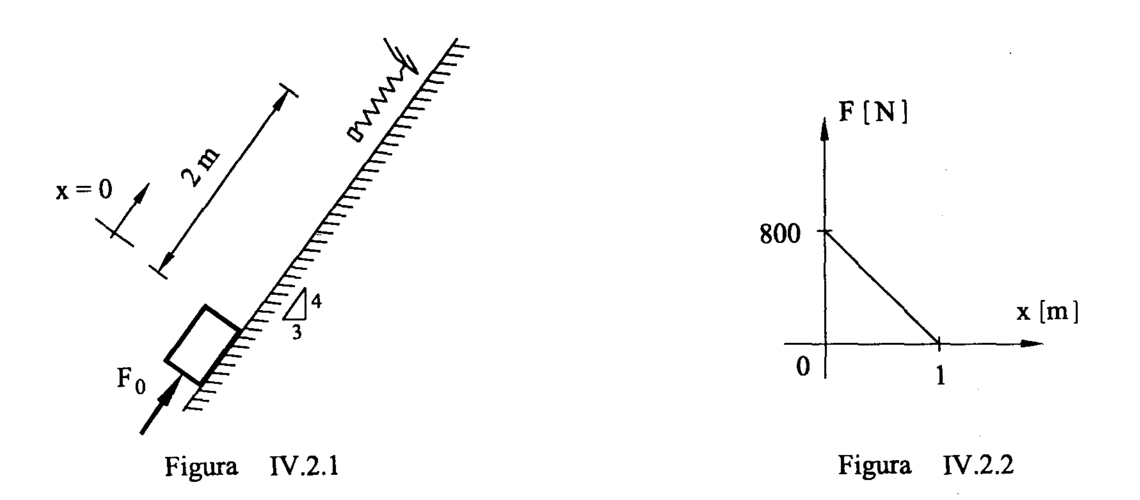


Figura IV.2.1

Figura IV.2.2

IV.3.-Se deja caer sobre un resorte lineal, de constante de elasticidad **K = 588.6 N/m,** que se encuentra en su longitud natural, un bloque de **3 kg** de masa, tal como se muestra en la figura; se observa que la deformación máxima que sufre el resorte es de 0.20 m; si considera que el bloque parte del reposo, obtenga la máxima rapidez que alcanza.

(Observación : la rapidez no es 1.98 m/s).

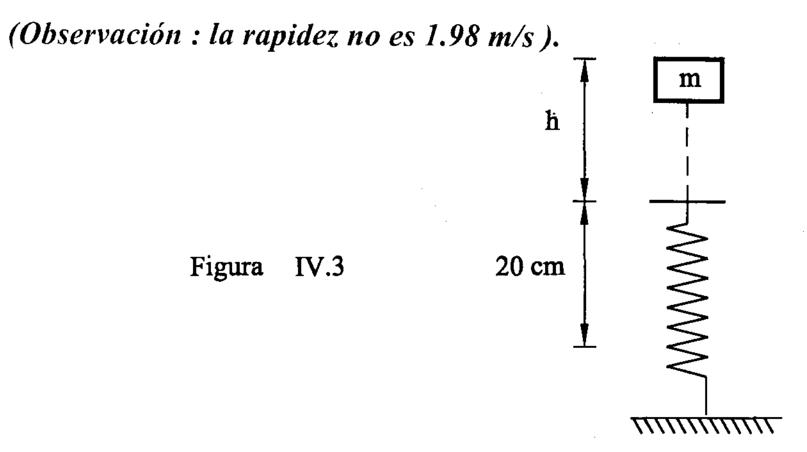


Figura IV.3

IV.4.-El imán que se muestra en la figura se encuentra fijo y la fuerza de atracción que ejerce sobre un objeto metálico de **6 N** de peso, en función de su posición, se tiene en la siguiente tabla; a partir de esta tabla se realizó la gráfica IV.4.2.

F [N]	r [cm]
200	1
50	2
22	3
13	4
8	5
6	6
4	7
3	8
2	9

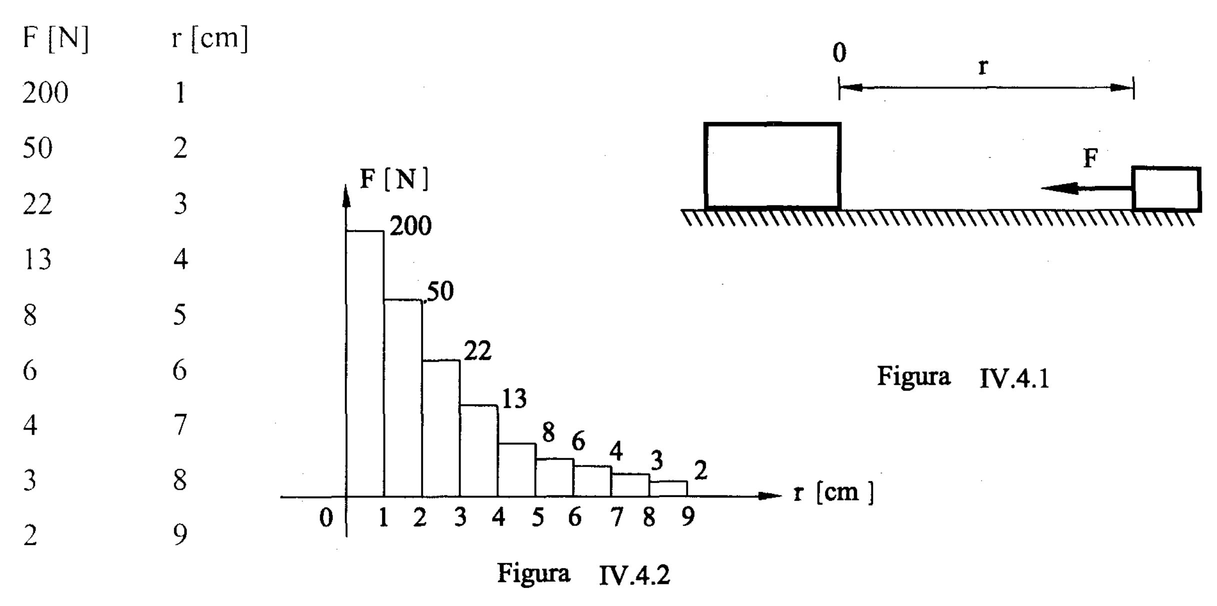


Figura IV.4.1

Figura IV.4.2

Considerando que el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto vale ***0.5,*** y que el fenómeno se inicia en la posición de movimiento inminente, obtenga la **rapidez** del objeto en el momento de chocar contra el imán.

IV.5.-El sistema mecánico que se muestra en la figura parte del reposo, con el resorte en su longitud natural y está formado por dos bloques **A** y **B** de **20** y **40 N** de peso, respectivamente, una cuerda flexible, inextensible y de masa despreciable y dos pequeñas poleas sin fricción. Si el coeficiente de fricción entre el plano y el bloque A es 0.2, la constante del resorte **K= 268 N/m** y el sistema se suelta, determine:

a).-la deformación máxima que experimenta el resorte por primera vez, y

b).-la máxima rapidez adquirida por el bloque B y la posición en que esto ocurre.

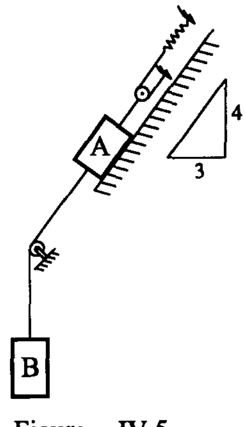


Figura IV.5

IV.6.- El sistema mecánico que se muestra en la figura, parte del reposo y está formado por un bloque **A** y un collarín **B** de **100 y 200 N** de peso, respectivamente, una cuerda flexible, inextensible y de masa despreciable que pasa por una pequeña polea fija y sin fricción. Si el collarín B se mueve en la guía vertical lisa y el bloque A lo hace sobre el plano horizontal rugoso, donde el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es $\mu = 0.6$, bajo la acción de la fuerza horizontal y constante P, obtenga su magnitud, para que al llegar el bloque B exactamente al punto Q, tenga velocidad nula. Con el valor calculado de P, obtenga la rapidez de A cuando B haya ascendido 0.20 m.

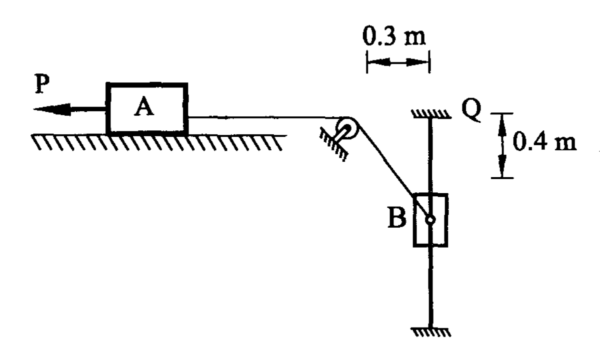


Figura IV.6

IV.7.-Una partícula de peso **W**, se suelta en una rampa circular lisa desde la posición **A**, tal como indica la figura; durante su movimiento al pasar por la posición B, se detecta que la fuerza que ejerce la rampa sobre la partícula tiene una magnitud de **30 N**. Para estas condiciones, determine :

a).-el peso W de la partícula,

b).-la rapidez de la partícula al pasar por B, y

c).-la magnitud de la aceleración total de la partícula al pasar por B.

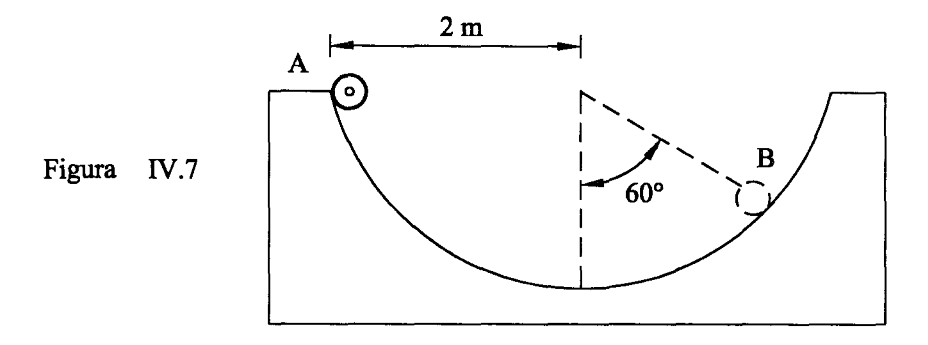


Figura IV.7

IV.8.-El balín de peso W que se muestra en la figura, se mueve por una rampa circular lisa de radio R, bajo la acción de una fuerza P horizontal y de magnitud constante. Obtenga la magnitud de P para que el balín, partiendo desde la parte inferior de la rampa sin velocidad inicial, llegue exactamente al punto A; con el valor calculado de P, obtenga:

a).-el ángulo θ para el cual $V = V_{máx}$, y

b).-la fuerza normal en la posición anterior.

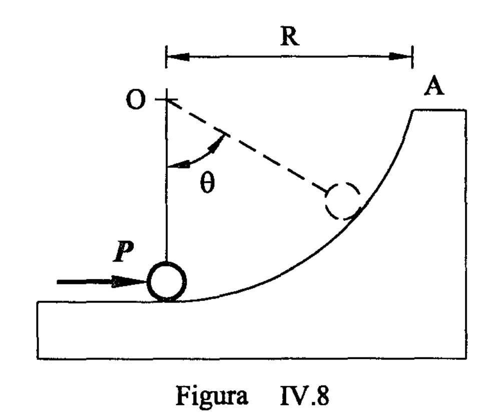


Figura IV.8

IV.9.-El péndulo simple que se muestra en la figura, de peso **W** y longitud de la cuerda L, se suelta en la posición θo; expresar en función de W, L y θ :

a).-la energía cinética de la partícula, y

b).-la tensión en la cuerda.

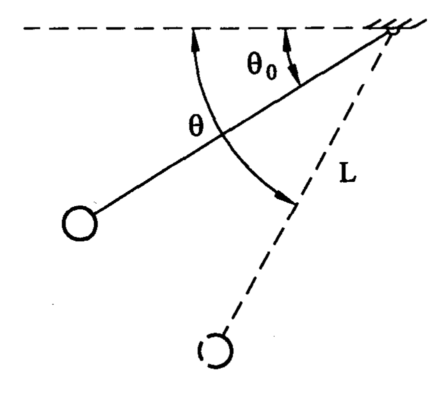


Figura IV.9

IV.10.-Un paquete se suelta desde el punto A y oscila en un plano vertical en el extremo de una cuerda flexible, inextensible y de masa despreciable de 4 m de longitud, que puede resistir una tensión máxima de dos veces el peso del paquete. ¿Se romperá la cuerda antes de pasar el paquete por la posición vertical?

a).-en caso de romperse, obtenga el ángulo θ en el que esto sucede así como también la rapidez con la que toca el piso, y

b).-en caso de no romperse de la razón que corresponda.

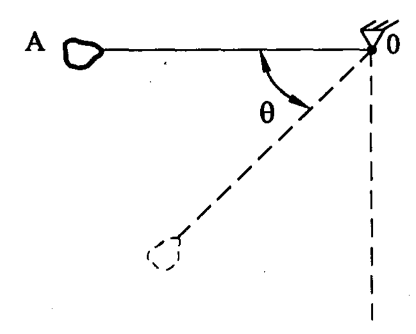


Figura IV.10

IV.11.-En el sistema mecánico que se muestra, el resorte se comprime 5 cm a partir de su posición natural de equilibrio, con un bloque de **2 kg** de masa; después de soltarlo se observa que asciende sobre el plano una distancia máxima de 47 cm. Determine a partir de este hecho experimental, la deformación δ que deberá comprimirse el resorte de nueva cuenta, para que el bloque llegue exactamente al punto P. Considere que el coeficiente de fricción cinética entre las superficies en contacto vale 0.4.

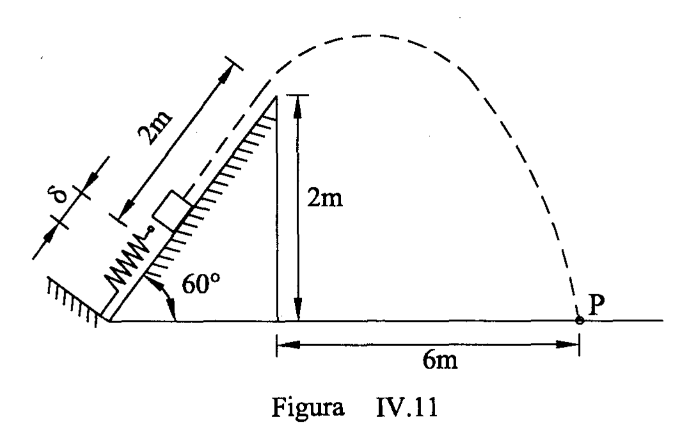


Figura IV.11

IV.12.-Un bloque de **20 N** de peso, se suelta desde la posición A de una rampa lisa, compuesta por un tramo recto AB y otro curvo BC, cuyo radio de curvatura vale 0.5 m. Obtenga:

a).-la altura h a la que deberá soltarse el bloque, para que al abandonar la rampa llegue exactamente al punto D,

b).-el valor de la fuerza normal en el punto C,

c).-el valor de la aceleración total, inmediatamente antes del punto C, y

d).- el valor de la aceleración total, inmediatamente después del punto C.

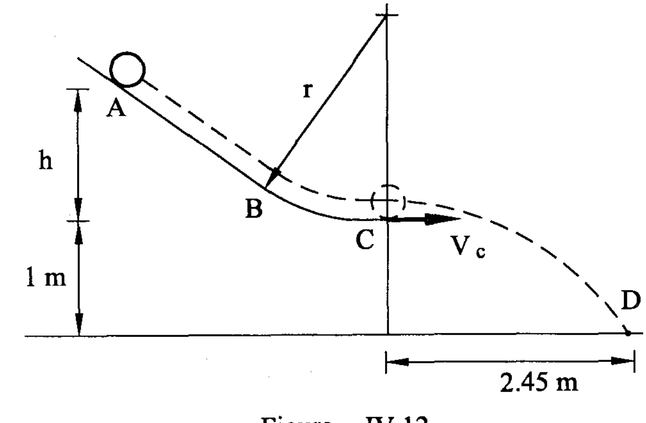


Figura IV.12

IV.13.-Un cuerpo de **5 N** de peso, se lanza desde el punto (1) con rapidez Vo sobre una trayectoria circunferencial lisa; después de abandonar la trayectoria curva en el punto (3), se mueve sobre una trayectoria horizontal rugosa ($\mu = 0.8$), hasta detenerse en el punto (4), al comprimir a los dos resortes, tal como se indica en la figura. Si ambos resortes tienen la misma constante de elasticidad **K = 640 N/m**, determine:

a).-la rapidez Vo a la que debe lanzarse el cuerpo para que los resortes superior e inferior, tengan una compresión máxima de 20 y 10 cm, respectivamente, y

b).-el valor de la fuerza normal sobre el cuerpo, cuando pasa por la posición (2).

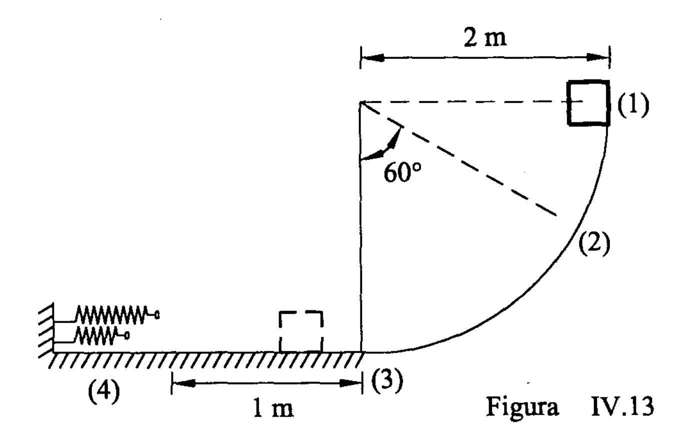


Figura IV.13

IV.14.-Se comprime un resorte lineal de constante de elasticidad **K = 9800 N/m** con una pequeña esfera de **20 N** de peso, tal como se muestra en la figura; si dicha esfera debe pasar por el punto P de la rampa curvilínea lisa, sin que despegue de ésta, obtenga el rango de valores para los cuales debe comprimirse el resorte, con el fin de que cumpla con la condición anteriormente mencionada.

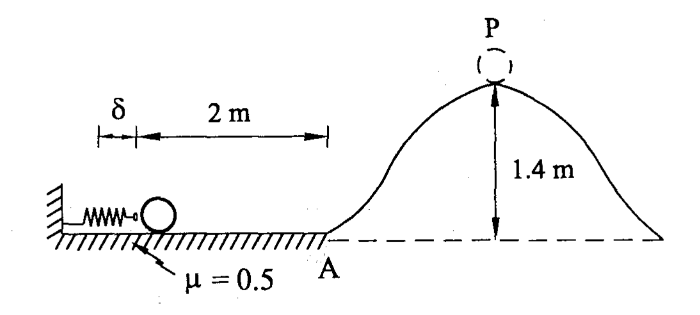


Figura IV.14

IV.15.-El sistema mecánico está formado por dos bloques **A** y **B** de **200 y 600 N** de peso, respectivamente, unidos por una cuerda flexible, inextensible y de masa despreciable de 1.5 m de longitud, que pasa por una pequeña polea fija y sin fricción. Si en la posición (1) el bloque A parte del reposo, con un movimiento pendular en torno de la polea "O" y al llegar a la posición (2), el bloque B empieza a moverse, determine:

a).-el valor del coeficiente de fricción estático entre el bloque B y la superficie horizontal,

b).-la magnitud de la aceleración total del bloque A, en la posición (2), y

c).-la magnitud de la reacción total en la polea "O", en la posición (2).

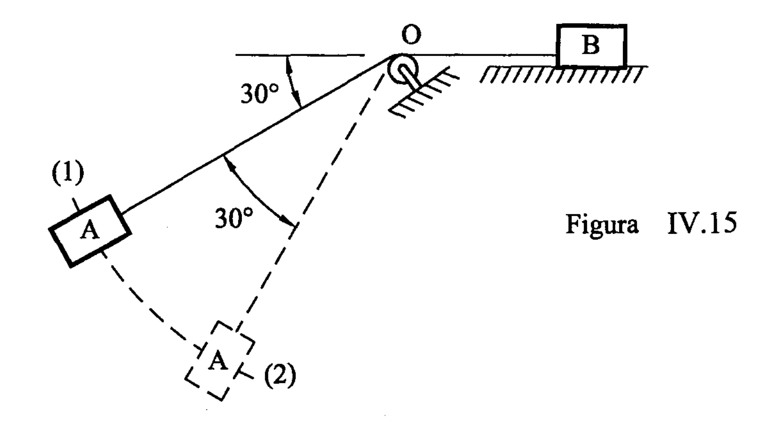


Figura IV.15

IV.16.-Dos partículas P_1 y P_2 de masas **m** y **2m** se lanzan desde una pared vertical, tal como se muestra en la figura. Calcule la variación de la energía cinética que posee cada una de las partículas, considerando las posiciones inicial y final, las de lanzamiento y llegada al piso, respectivamente.

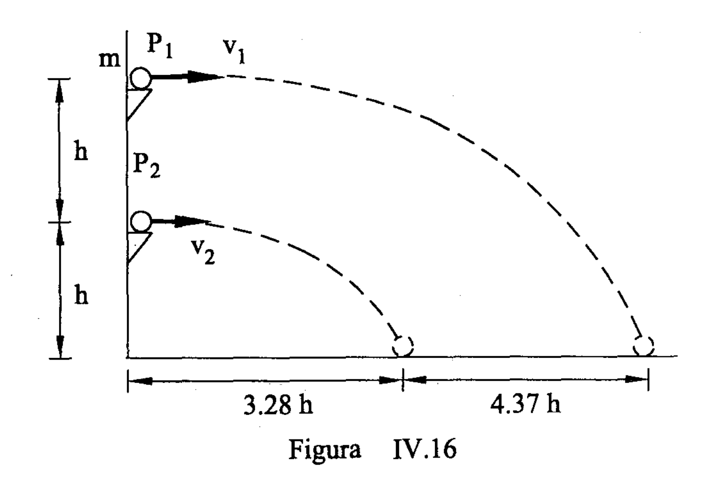


Figura IV.16

IV.17.-La fuerza **F** = **3i** + **4j N**, actúa sobre la partícula de masa muy pequeña que se mueve sobre un plano vertical. Verifique que el trabajo realizado por esta fuerza, al mover a la partícula desde el origen hasta el punto P, es el mismo, si lo hace:

a).-por la rampa rectilínea, y

b).-por la rampa parabólica.

¿Qué características atribuye a esta fuerza?

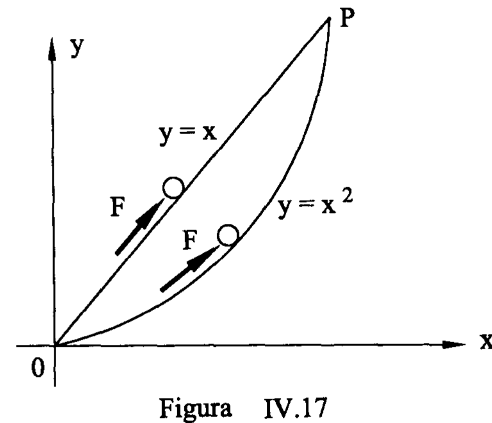


Figura IV.17

IV.18.-El sistema mecánico está formado por dos bloques **A** y **B** de **220** y **400 g** de masa, respectivamente, unidos por una cuerda flexible, inextensible y de masa despreciable que pasa por una pequeña polea fija y sin fricción. Si el sistema se suelta desde el reposo y el coeficiente de fricción entre A y el plano horizontal es 0.28, determine:

a).-la rapidez del bloque A, cuando el bloque B toca el piso, y

b).-la máxima distancia d alcanzada por el bloque A .

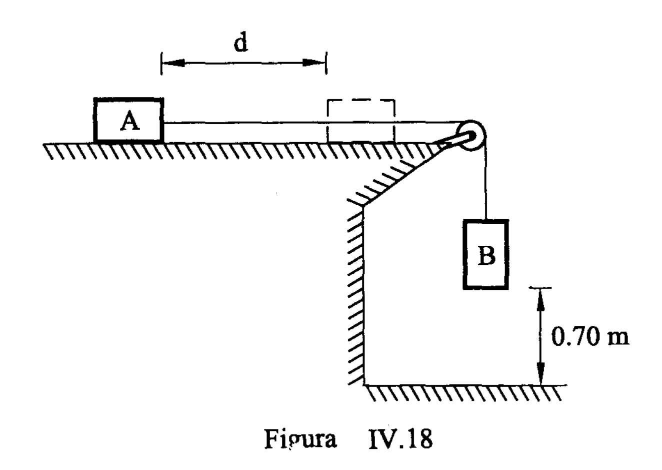


Figura IV.18

IV.19.-Un bloque de **220 g** de masa está unido a un resorte lineal mediante una cuerda larga, flexible, inextensible y de peso despreciable, de tal forma que al desplazar el bloque hacia la derecha X cm, la cuerda trasmite esta acción al extremo derecho del resorte, deformándolo igual cantidad. La gráfica anexo muestra el comportamiento de la deformación del resorte con respecto a la fuerza. Si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es **0.28** y el bloque se desplaza **4 cm** hacia la derecha y luego se suelta desde el reposo, determine:

a).-la rapidez del bloque, cuando la fuerza del resorte deje de actuar, y

b).-la máxima distancia alcanzada por el bloque.

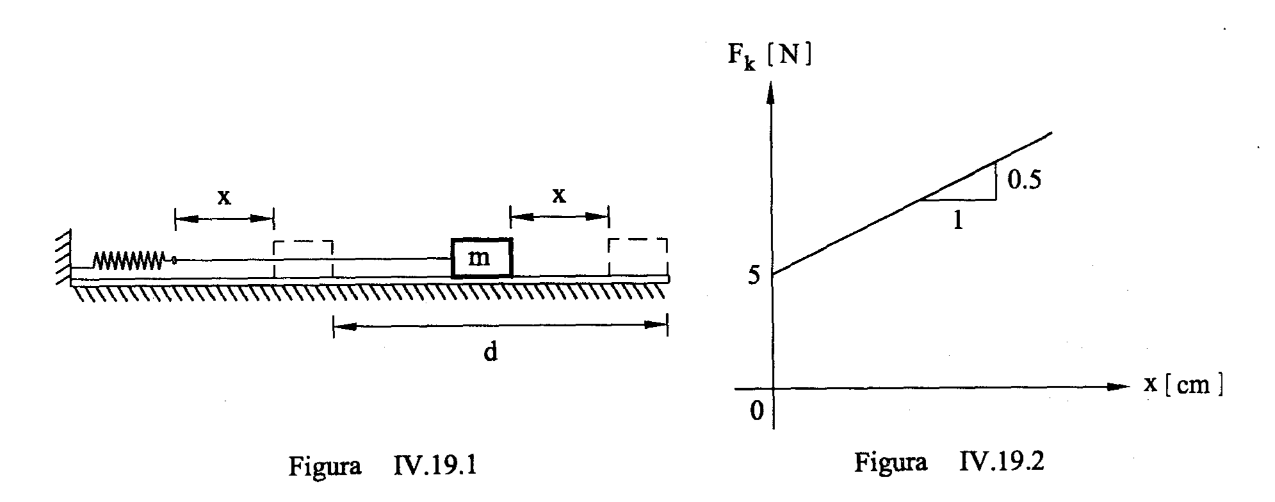


Figura IV.19.1 Figura IV.19.2

7 Problema de trabajo y energía para la partícula

Un bloque que pesa **W = 40 N** se suelta del reposo en la posición que se muestra en la figura.

Los dos resortes que actúan sobre el bloque son idénticos, y cada uno de ellos tiene una tensión inicial **T = 30 N**. Si la constante de rigidez de dichos resortes es **k = 530 N/m**, determine la rapidez del bloque cuando los resortes están en posición horizontal, considerando que el movimiento del bloque tiene lugar en un plano vertical.

Dimensiones, en metros

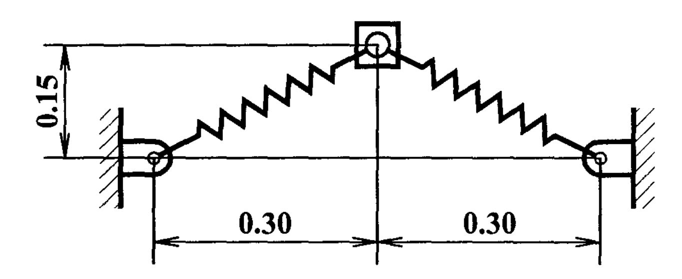
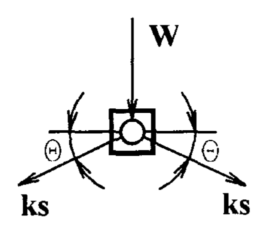


Diagrama de cuerpo libre



La variable **s** representa la elongación de los resortes.

Dado que las tres fuerzas son conservativas, se puede aplicar el **Principio de conservación de la energía mecánica**:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$\tfrac{1}{2} m v_1^2 + W h_1 + 2(\tfrac{1}{2} k s_1^2) = \tfrac{1}{2} m v_2^2 + W h_2 + 2(\tfrac{1}{2} k s_2^2)$$

Considerando que el punto de energía potencial gravitatoria nula está sobre la línea que pasa por las articulaciones de los resortes con las paredes:

$$h_1 = 0.15 \text{ m}; \qquad h_2 = 0.00 \text{ m}$$

Si la tensión inicial de los resortes es de **T = 30 N**:

$$k\, s_1 = 30; \qquad s_1 = \frac{30}{530}$$

$$s_1 = 0.0566 \text{ m}$$

La longitud de los resortes en las posiciones **1** y **2** son:

$$l_1 = \sqrt{(0.30)^2 + (0.15)^2}\ ; \qquad l_1 = 0.3354 \text{ m}$$

por tanto, $l_0 = 0.3354 - 0.0566;$ $\qquad l_0 = 0.2788$ m

y dado que $l_2 = 0.30$ m:

$$s_2 = l_2 - l_0; \qquad s_2 = 0.0212 \text{ m}$$

Sustituyendo todos los valores:

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{40}{9.8}\right)(0)^2 + (40)(0.15) + (2)\left[\tfrac{1}{2}(530)(0.0566)^2\right] = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{40}{9.8}\right)v_2^2 + (40)(0) + (2)\left[\tfrac{1}{2}(530)(0.0212)^2\right]$$

$$6 + 1.698 = 2.041\, v_2^2 + 0.2380; \qquad 2.041\, v_2^2 = 7.46$$

$$v_2^2 = 3.655;$$

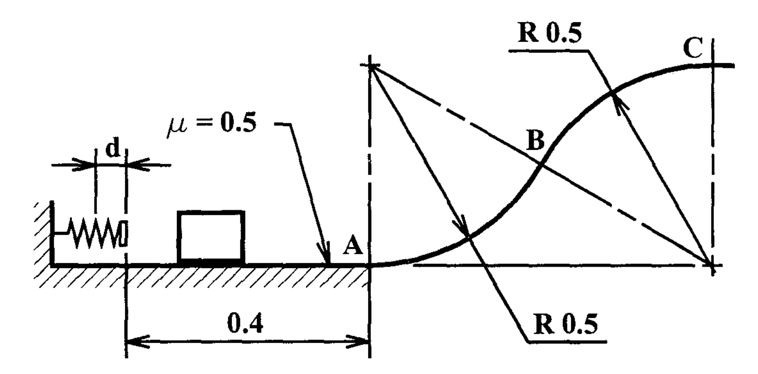
$$\boxed{v_2 = 1.912 \text{ m/s}}$$

8 Problema de trabajo y energía para la partícula

El bloque con peso **W = 30 N** que se muestra en la figura, se coloca en el extremo libre de un resorte lineal con constante **k = 1500 N/m**, y posteriormente se comprime éste una cierta longitud **d**. Considerando que únicamente se tiene fricción (seca) en el tramo recto (los tramos curvos son lisos), determine:

a) el valor **d** que se requiere para que el bloque llegue justo al punto **C** con rapidez nula; y

b) la magnitud de la aceleración total en el punto **B**.



Longitudes, en metros

Diagrama de cuerpo libre en el tramo en que el bloque está interactuando con el resorte:

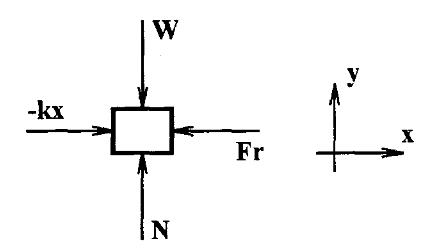


Diagrama de cuerpo libre en el tramo horizontal:

Diagrama de cuerpo libre en los tramos curvos:

Las fuerzas que desarrollan trabajo son el del resorte, **–kx**, la fricción, **Fr**, y en el tramo curvo el peso, **W**.

El resorte realiza trabajo en el intervalo $-d \le x \le 0$ m

$$U^{k}_{-d-0} = \int_{-d}^{0} -k\,x\,dx\,; \qquad U^{k}_{-d-0} = \left[-\tfrac{1}{2}k\,x^2\right]_{-d}^{0}$$

$$U^{k}_{-d-0} = 0 - \left[-\tfrac{1}{2}(1500)(-d)^2\right]; \qquad U^{k}_{-d-0} = 750\,d^2 \quad N\cdot m$$

La fricción realiza trabajo en el tramo $-d \le x \le 0.4$ m:

$$U^{Fr}_{-d-A} = \int_{-d}^{0.4} -Fr\,dx$$

Dado que $N - W = 0;$ $\qquad N = 30\ N$

$$Fr' = \mu N; \qquad Fr' = (0.5)(30)$$

$$Fr' = 15\ N$$

$$U^{Fr}_{-d-A} = \int_{-d}^{0.4} -15\,dx\,; \qquad U^{Fr}_{-d-A} = \left[-15x\right]_{-d}^{0.4}$$

$$U^{Fr}_{-d-A} = -6 - 15d \quad N\cdot m$$

El peso realiza trabajo en el intervalo de $0 \le y \le 0.5$ m:

$$U^{W}_{A-C} = \int_{0}^{0.5} -W\,dy\,; \qquad U^{W}_{A-C} = \left[-30\,y\right]_{0}^{0.5}$$

$$U^{W}_{A-C} = -15 \quad N\cdot m$$

Aplicando el principio de trabajo y energía:

$$U^{k}_{-d-0} + U^{Fr}_{-d-A} + U^{W}_{A-C} = \tfrac{1}{2}m\,v_C^2 - \tfrac{1}{2}m\,v_{-d}^2$$

dado que $v_{-d} = 0$ y $v_C = 0$ m/s:

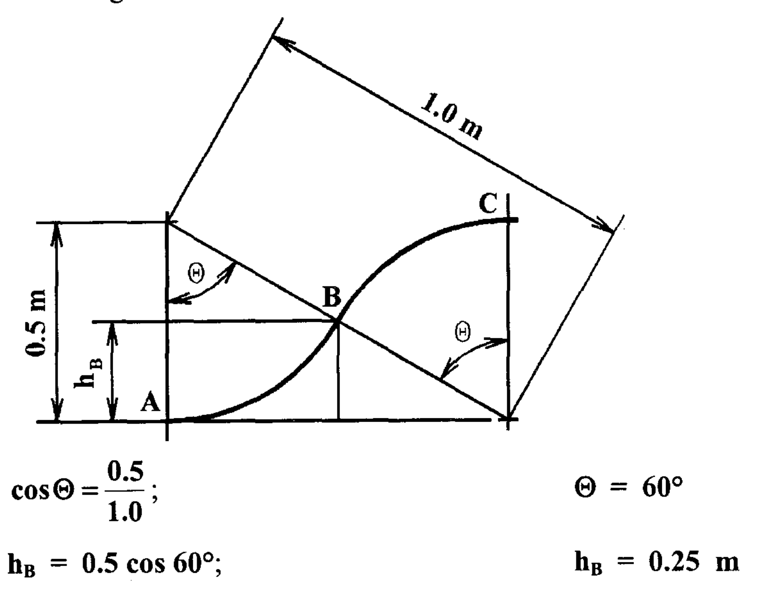
$$750\,d^2 - 6 - 15\,d - 15 = 0 - 0; \qquad 750\,d^2 - 15\,d - 21 = 0$$

$$d^2 - 0.02\,d - 0.028 = 0; \qquad d = 0.01 + \sqrt{(0.01)^2 + 0.028}$$

$$d = 0.01 + 0.1676;$$

$$\boxed{d = 0.1776\ m}$$

Cálculo de la magnitud de la aceleración en **B**:



$\cos\Theta = \frac{0.5}{1.0}$; $\Theta = 60°$

$h_B = 0.5 \cos 60°$; $h_B = 0.25$ m

Para determinar la aceleración normal, se requiere calcular la rapidez en **B**, v_B:

$U^{W}_{A-B} = \int_0^{0.25} -30\, dy$; $U^{W}_{A-B} = -7.5 \quad N \cdot m$

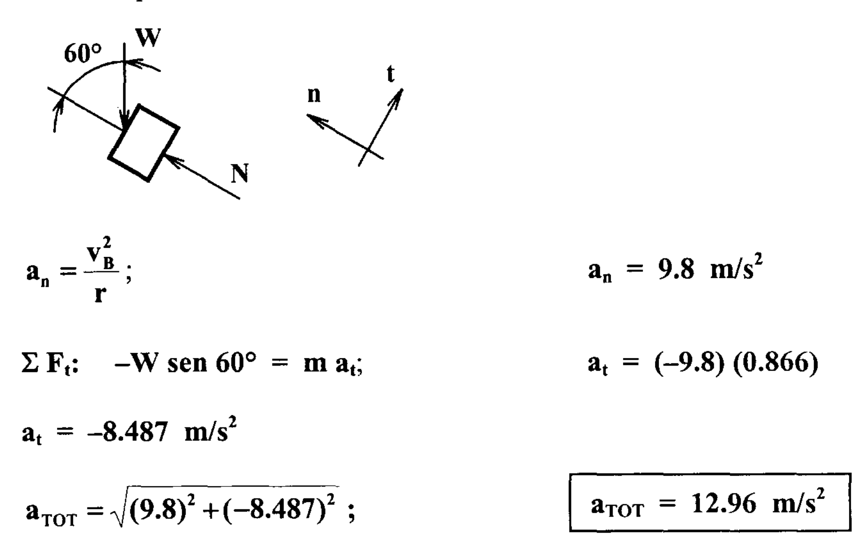
$U^{k}_{-d-0} + U^{Fr}_{-d-A} + U^{W}_{A-B} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_{-d}^2$;

$750\,(0.1776)^2 - 6 - 15\,(0.1776) - 7.5 = \frac{1}{2}\left(\frac{30}{9.8}\right) v_B^2 - 0$

$v_B^2 = \frac{(23.66 - 6 - 2.664 - 7.5)(19.6)}{30}$ $v_B^2 = 4.9 \quad m^2/s^2$

Considerando que el punto **B** está contenido en la primera curva:

Diagrama de cuerpo libre



$a_n = \frac{v_B^2}{r}$; $a_n = 9.8 \ m/s^2$

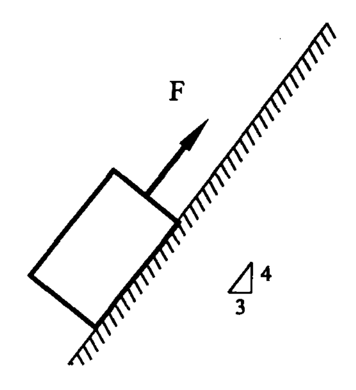
ΣF_t: $-W \text{ sen } 60° = m\, a_t$; $a_t = (-9.8)\,(0.866)$

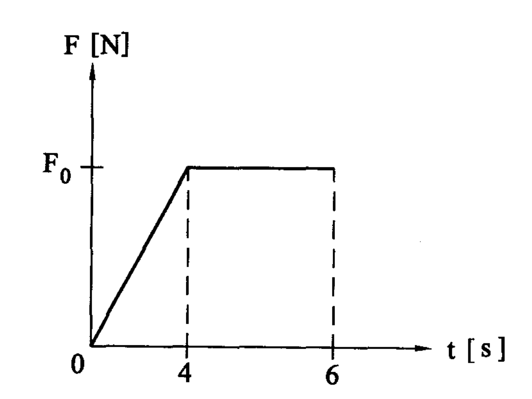
$a_t = -8.487 \ m/s^2$

$a_{TOT} = \sqrt{(9.8)^2 + (-8.487)^2}$; $\boxed{a_{TOT} = 12.96 \ m/s^2}$

SERIE V

PARTÍCULA





Impulso y Cantidad de movimiento

V.1.-Un bloque de **20 N** de peso, inicialmente en reposo, se somete a la acción de una fuerza P paralela al plano inclinado y cuya magnitud está dada por la gráfica V.I.2; si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es **0.2,** determine:

a).-la rapidez del bloque para t = 6 s, y

b).-el instante para el cual la variación de la cantidad de movimiento vale 14.4 Ns.

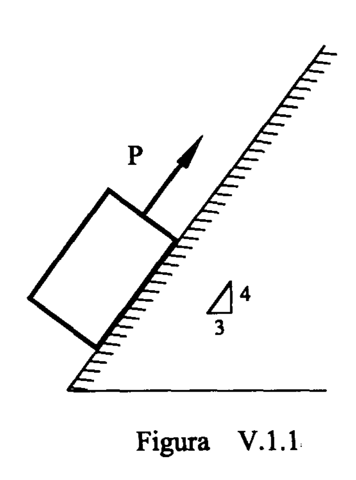


Figura V.1.1

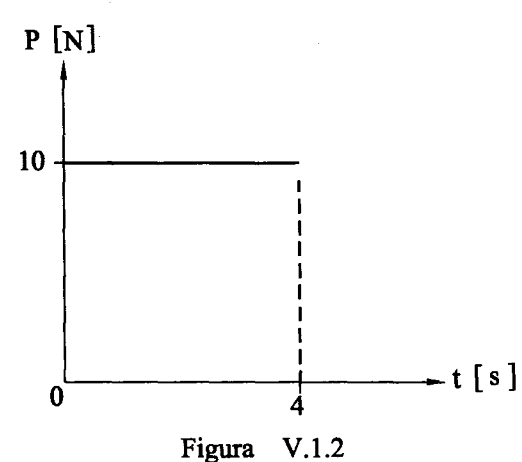


Figura V.1.2

V.2.-Un bloque de **20 N** de peso, inicialmente en reposo, se somete a la acción de una fuerza ***F*** paralela al plano inclinado y magnitud dada por la gráfica V.2.2; si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es **0.2**, determine:

a).- el valor de Fo, de tal forma que dicho bloque se detenga en t = 4 s, y

b).-la rapidez del bloque en t = 6 s.

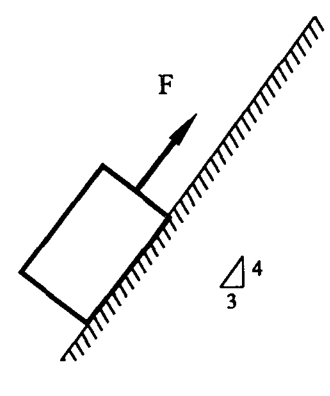


Figura V.2.1

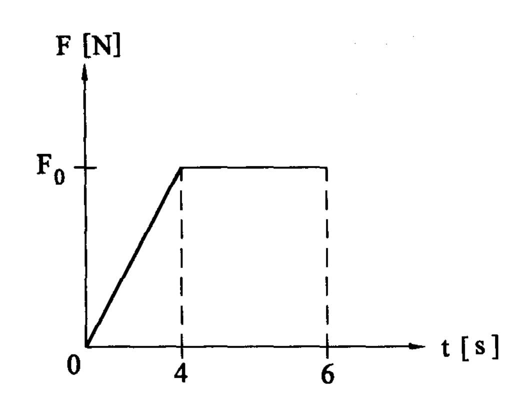


Figura V.2.2

V.3.-Una partícula de **2 kg** de masa, se somete a la acción de una fuerza resultante dada por la la ecuación $\mathbf{F = (4t\text{-}2)i + (3t^2\text{-}4t)j}$ N, para t en s; sabiendo que la partícula parte del reposo en t = 0 s, y cuando t = τ s, la cantidad de movimiento de la partícula es paralela al eje X determine :

a).-el impulso generado por F en el intervalo [0,τ] s, y

b).-la velocidad en ése instante.

V.4.- Un bloque de **10 N** de peso, inicialmente en reposo, se somete a la acción de una fuerza F horizontal, cuya magnitud sigue la relación $\mathbf{F^2 + t^2 = 16}$ **N**, para t en [s], válida en el intervalo [0, 4] s ; si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es μ = 0.2, determine :

a).-la cantidad de movimiento de la partícula en t = 4 s, y

b).-el tiempo que tarda en detenerse.

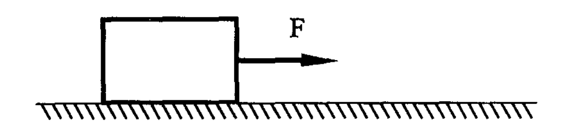


Figura V.4

V.5.-Un bloque de **1 kg** de masa, con velocidad inicial Vo = 4m/s dirigida hacia la izquierda, se somete a la acción de una fuerza horizontal cuya magnitud muestra la gráfica V.5.2. Despreciando todo efecto de fricción, determine la velocidad del bloque en t = 10 s.

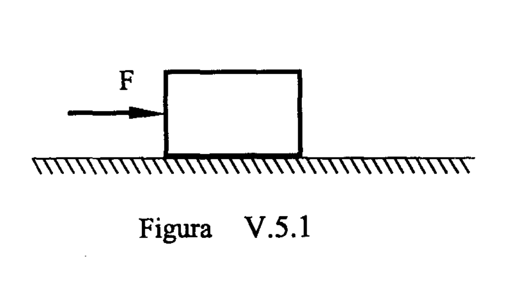


Figura V.5.1

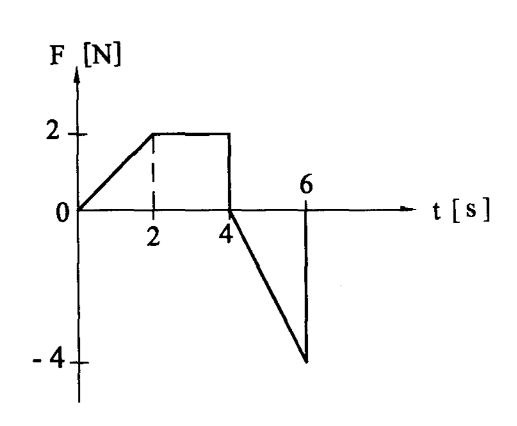


Figura V.5.2

V.6.- Un bloque de **40 N** de peso, inicialmente en reposo, se somete a la acción de una fuerza F , cuya magnitud variable se muestra en la gráfica V.6.2; si el coeficiente de fricción cinética entre las superficies en contacto es 0.3, determine :

a).-la velocidad en t = 3 s,

b).- la velocidad en t = 6 s, y

c).-el tiempo que tarda en detenerse.

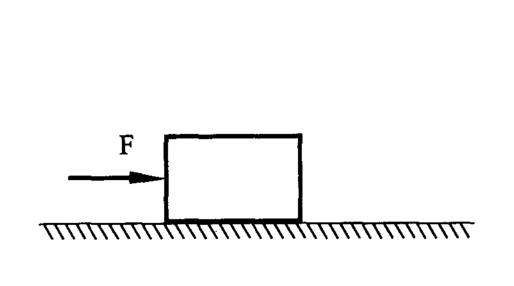


Figura V.6.1

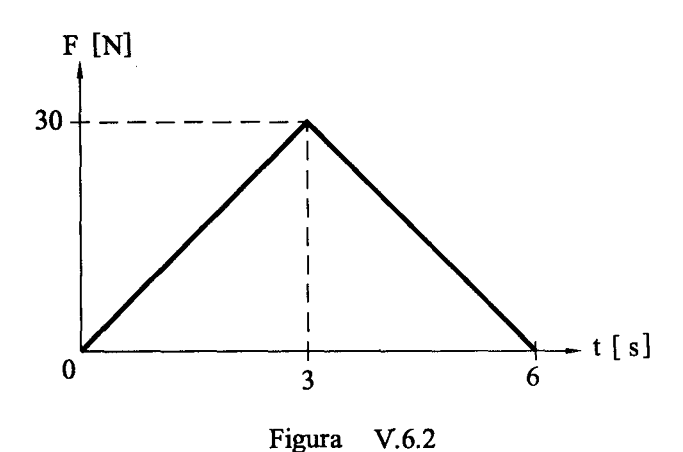


Figura V.6.2

V.7.-Un bloque de **30 N** de peso, inicialmente en reposo, se somete a la acción de una fuerza F paralela al plano inclinado y magnitud dada por la gráfica V.7.2; si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es **0.2**, determine :

a).-el valor de la ordenada Fo, de la gráfica, para que el bloque se detenga en t = 5 s , y

b).-la variación de la cantidad de movimiento del bloque en el intervalo [3,5] s.

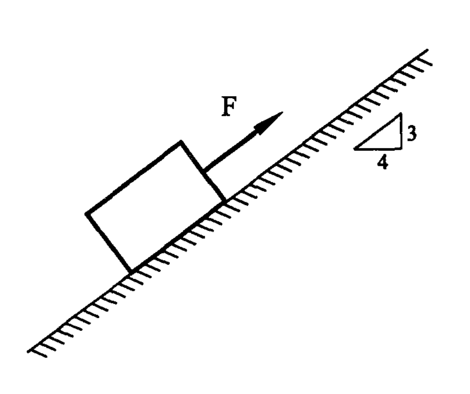


Figura V.7.1

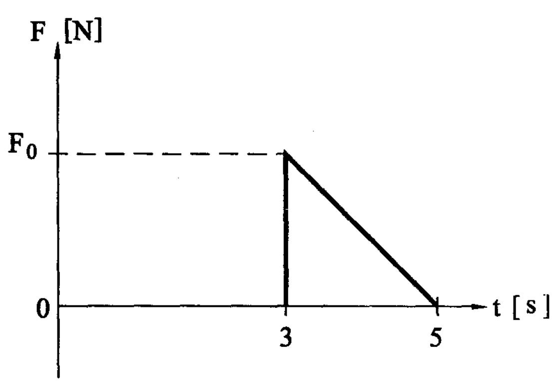


Figura V.7.2

V.8.-Una caja de **20 N** de peso, descansa sobre un plano horizontal y se le aplica una fuerza impulsiva verticalmente hacia arriba, por medio de un cable, tal como se muestra en la figura. Si el comportamiento de la magnitud de la fuerza P se indica en la gráfica anexa, calcule :

a).-la magnitud Po, necesaria para que la caja ascienda una altura máxima de 20 m, inmediatamente después de que se deja de aplicar la fuerza

b).-el impulso de la fuerza P en el intervalo [0, 0.01] s, y

c).-la velocidad de la caja en t = 0.01 s.

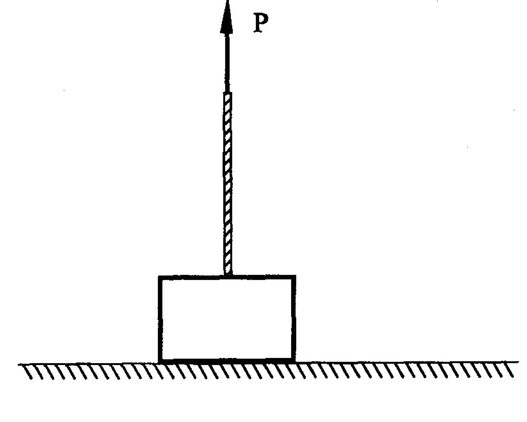


Figura V.8.1

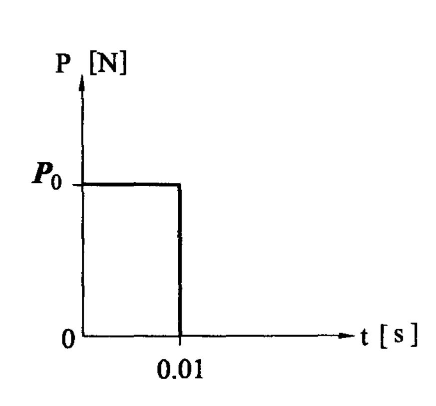


Figura V.8.2

V.9.- El sistema mecánico está formado por dos bloques **A** y **B** de **60** y **80 N** de peso, respectivamente, unidos por dos cuerdas flexibles, inextensibles y de masas despreciables que pasan por dos pequeñas poleas, una fija y otra móvil, ambas sin fricción. Si el cuerpo A tiene una velocidad inicial V_{Ao} y el comportamiento que tiene su cantidad de movimiento se muestra en el gráfico adjunto, obtenga:

a).-la velocidad inicial del bloque A,

b).-la velocidad del bloque B en t = 0.5 s,

c).-la fuerza de tensión en el cable que sostiene a B, y

d).-el coeficiente de fricción cinética entre el plano inclinado y el bloque B.

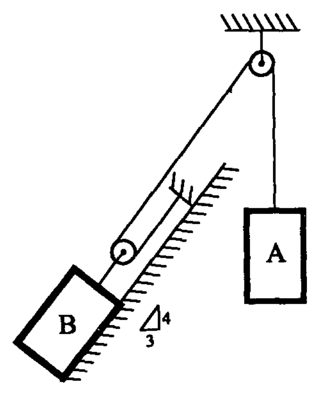


Figura V.9.1

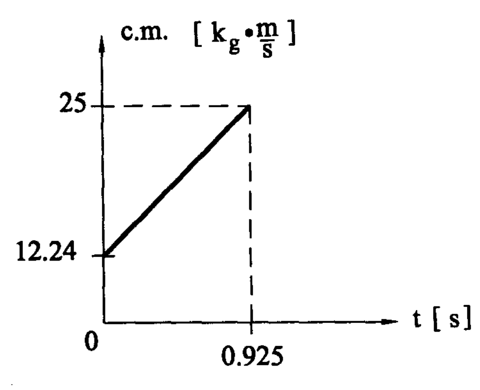


Figura V.9.2

9 Problema de impulso y cantidad de movimiento para la partícula

El bloque con masa **m = 10 kg** que se muestra en la figura, se encuentra en reposo sobre el plano horizontal rugoso, cuyos coeficientes de fricción estática y cinética son, respectivamente, $\mu_E = 0.25$ y $\mu_C = 0.20$.

Si en **t = 0 s** se le aplica la fuerza cuya gráfica se proporciona, determine:

a) el instante en que inicia su movimiento;

b) la rapidez del bloque en **t = 5 s**; y

c) el tiempo total que permanece en movimiento.

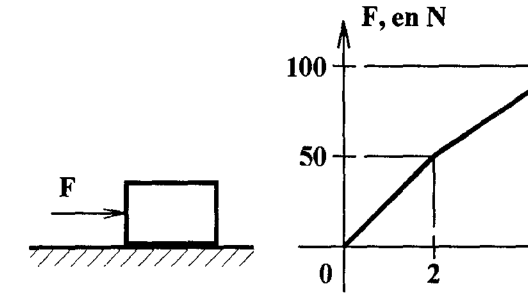
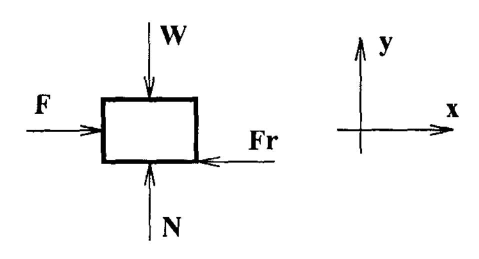


Diagrama de cuerpo libre

ΣF_x: $F - Fr = ma_x$ $\qquad\qquad$ ΣF_y: $N - W = 0$

En el intervalo $0 \leq t \leq 2$ s:

$$F = \frac{50}{2}t\,; \qquad\qquad Fr' = \mu_E N$$



como:

$$N = 10(9.8); \qquad\qquad N = 98\ \text{N}$$

$$Fr' = 0.25(98) \qquad\qquad Fr' = 24.5\ \text{N}$$

a) El bloque empieza a moverse cuando **F = Fr'**, por lo tanto:

$$\frac{50}{2}t = 24.5\,; \qquad\qquad t = \frac{49}{50}\,;$$

$$\boxed{t = 0.98\ \text{s}}$$

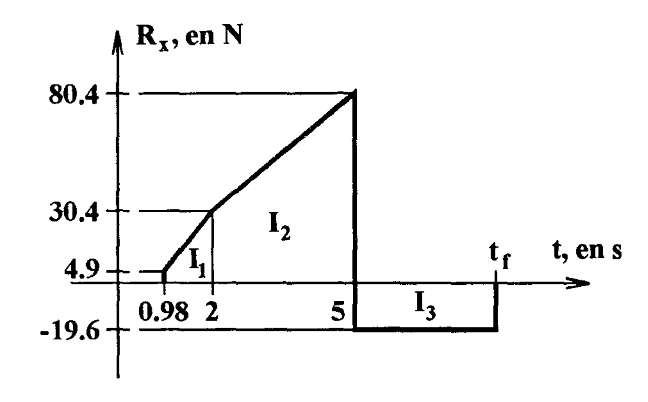
b) Para el intervalo $\mathbf{0.98 \leq t \leq 2}$ s:

$\mathbf{Fr_c = \mu_C N}$; $\mathbf{Fr_C = 19.6}$ **N]**

Para $\mathbf{t = 0.98}$ s:

$\mathbf{R_x = F - Fr_c}$; $\mathbf{R_x = 4.9}$ **N**

La gráfica de la fuerza resultante en **x**, $\mathbf{R_x}$, quedará:



$$I_1 = \frac{4.9 + 30.4}{2}(1.02);$$ $\mathbf{I_1 = 18.003}$ **N·s**

$$I_2 = \frac{30.4 + 80.4}{2}(3);$$ $\mathbf{I_2 = 166.2}$ **N·s**

$$\int_{0.98}^{5} R_x\, dt = I_1 + I_2;$$ $$\int_{0.98}^{5} R_x\, dt = 184.203$$

por tanto:

$$\int_{0.98}^{5} R_x\, dt = mv_{t=5} - mv_{t=0.98}$$

$\mathbf{184.203 = 10v_{t=5}}$ $\boxed{v_{t=5} = 18.42\ [m/s]}$

c) para determinar el tiempo que permanece en movimiento, sabiendo que $\mathbf{v_{t=t_f} = 0}$ **m/s**:

$\mathbf{I_3 = -184.203}$ **[N·s]**;

$\mathbf{I_3 = -19.6\ (t_f - 5)}$ $\mathbf{-184.203 = -19.6\ (t_f - 5)}$;

$$t_f = \frac{184.203}{19.6} + 5;$$ $\mathbf{t_f = 14.40}$ **s**

por lo tanto:

$\mathbf{\Delta t = 14.40 - 0.98}$

$\boxed{\Delta t = 13.42\ s}$

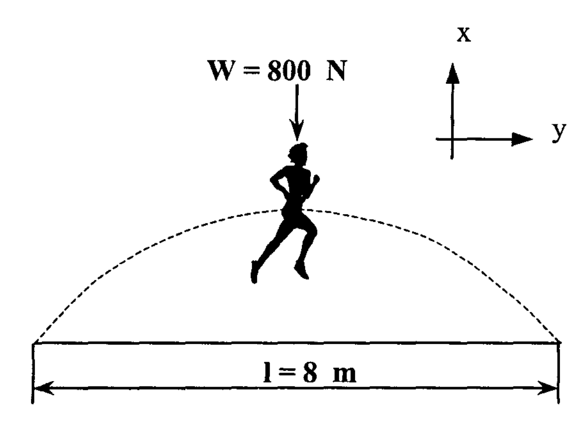
10 Problema de impulso y cantidad de movimiento para la partícula

Un saltador de longitud con un peso de **W = 800 N**, corre con una rapidez constante de **v =10 m/s** en el momento en que se impulsa para el salto. Si se considera que dicho impulso es completamente vertical, y se desprecia la resistencia del aire así como el tamaño del atleta, determine:

a) el impulso que requiere el saltador para alcanzar una marca de **l = 8 m**;

b) el tiempo que permanece en el aire.

Diagrama de cuerpo libre



Dado que el movimiento es un tiro parabólico ideal, donde $v_{x,0} = 10$ **m/s**:

$$\frac{dx}{dt} = 10; \qquad \int_0^8 dx = \int_0^t 10\,dt;$$

$$8 = 10\,t; \qquad \boxed{t = 0.8 \text{ s}}$$

que es el tiempo que requiere el atleta para saltar los **l =8 m**.

Por tanto, las ecuaciones de impulso y cantidad de movimiento quedan:

$$mv_{x,0} + I_x = mv_{x,1}; \qquad mv_{y,0} + I_y - \int_0^t W\,dt = mv_{y,1};$$

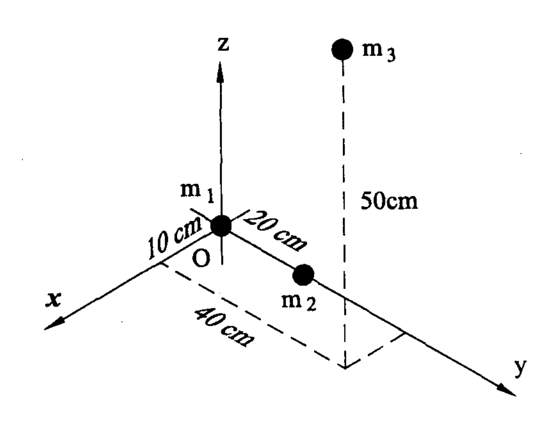
considerando que la rapidez vertical antes del salto es nula, $v_{y,0} = 0$ **[m/s]**, y la simetría de la trayectoria con respecto al punto más alto, el saltador alcanza dicho punto en **t = 0.4 s**, y como para dicho instante la rapidez vertical es también nula, $v_{y,1} = 0$ **m/s**:

$$0 + I_y - \int_0^{0.4} 800\,dt = 0; \qquad I_y = 800\,(0.4);$$

$$\boxed{I_y = 320 \text{ N·s}}$$

SERIE VI

SISTEMAS DE PARTÍCULAS



VI.1.-Se colocan cuatro partículas de masas $\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_2}$, $\mathbf{m_3}$ y $\mathbf{m_4}$, en las posiciones (-4,3,2) , (-2,-1,-4), (1,2,3) y (2,2,-4) m, respectivamente y se desea que su centro de masa se encuentre en la posición (0.3,1.5,-1.3) m. Si la masa total de sistema es de **20 kg**, determine la magnitud de cada una de las masas.

VI.2.-El sistema que se muestra, tiene la posición indicada en t = 0 s y cada una de las partículas se encuentra en reposo. Si $\mathbf{m_a = 500}$, $\mathbf{m_b = 300}$ **y mc = 200 g**, y las magnitudes de las fuerzas son F_a y F_c son **10** y **8 N** y considerando como externas la atracción de la Tierra sobre ellas, determine la posición, velocidad y aceleración del centro de masa del sistema en t = 1 s.

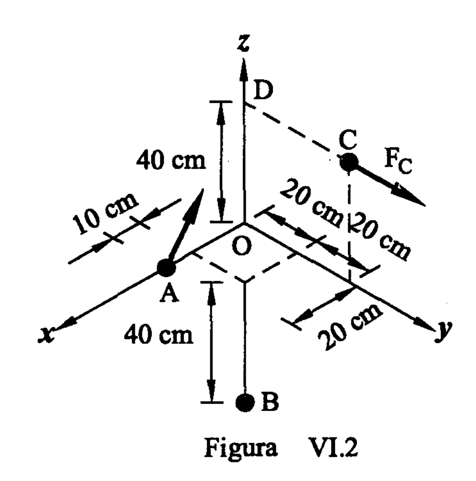


Figura VI.2

VI.3.-Para la configuración que se muestra en el sistema de partículas, se tienen los siguientes datos:

Masas	**posiciones**	**velocidades**	**aceleraciones**
$m_1 = 2$ kg	(0,0,0) m	$V_1(2,-4,0)$ m/s	$a_1(4,0,0)$ m/s^2
$m_2 = 3$ kg	(4,3,0) m	$V_2(-1,-3,4)$ m/s	$a_2(1,1,0)$ m/s^2
$m_3 = 5$ kg	(-6,6,3) m	$V_3(3,0,-2)$ m/s	$a_3(-2,1,-1)$ m/s^2

Determine:

a).-la posición y la velocidad del centro de masa,

c).-la aceleración del centro de masa, y

d).-la cantidad de movimiento lineal del sistema.

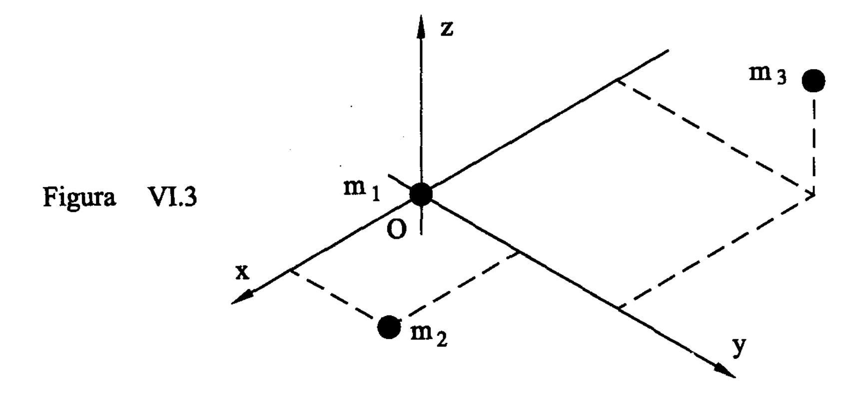


Figura VI.3

VI.4.-En el sistema de partículas que se muestra, $\mathbf{m_1 = 1}$, $\mathbf{m_2 = 2}$ y $\mathbf{m_3 = 2}$ **kg** ; en las posiciones mostradas, las velocidades de m_1 y m_2, tienen por magnitudes **4** y **3** m/s. respectivamente, y están dirigídas hacia el punto B. Si se desea que el centro de masa del sistema tenga velocidad nula, determine:

a).-la rapidez de m_3 y el ángulo que debe formar su velocidad con el segmento BC, y

b).-la distancia que hay entre el centro de masa y el punto A.

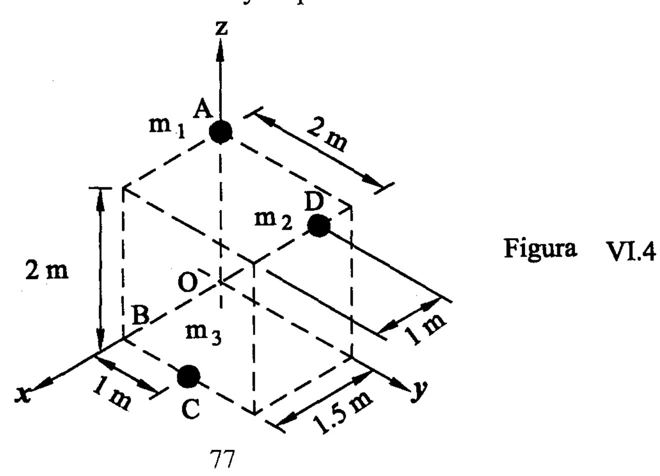


Figura VI.4

VI.5.-Las partículas de masas $\mathbf{m_A = 2}$, $\mathbf{m_B = 4}$ y $\mathbf{m_C = 1}$ **kg**, están ubicadas en los puntos A, B y C, respectivamente. A tiene una aceleración de magnitud $\mathbf{a_A = 5\ m/s^2}$ y en la dirección del segmento AH; C está sujeta a una fuerza externa de **4 N** dirigida en la dirección del segmento CE. Si la aceleración del centro de masa del sistema es (-1,10,-4) 3 m/s^2, determine:

a).-la magnitud de la fuerza externa que actúa sobre B, y

b).-la magnitud del momento respecto al punto Q, del sistema.

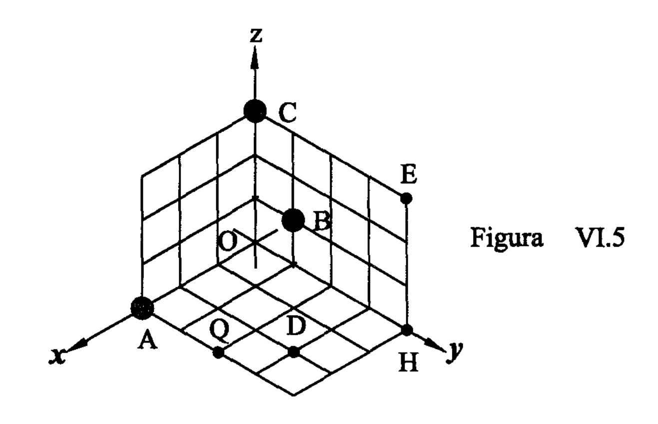


Figura VI.5

VI.6.-Para el sistema de partículas que se muestra, $\mathbf{m_1 = 5}$, $\mathbf{m_2 = 2}$ **kg**; $\mathbf{V_2 = -4i+k}$ **m/s** y $\mathbf{V_3 = 3i+4j-2k}$ **m/s**; la posición del centro de masa del sistema es (-4, 24, 22) cm y su velocidad $\mathbf{Vc = 1.1i+3.2j+2.1k}$ **m/s** .Para estas condiciones, determine:

a).-la magnitud de m_3,

b).-las distancias d y e, y

c).-V_1 y la cantidad de movimiento lineal del sistema.

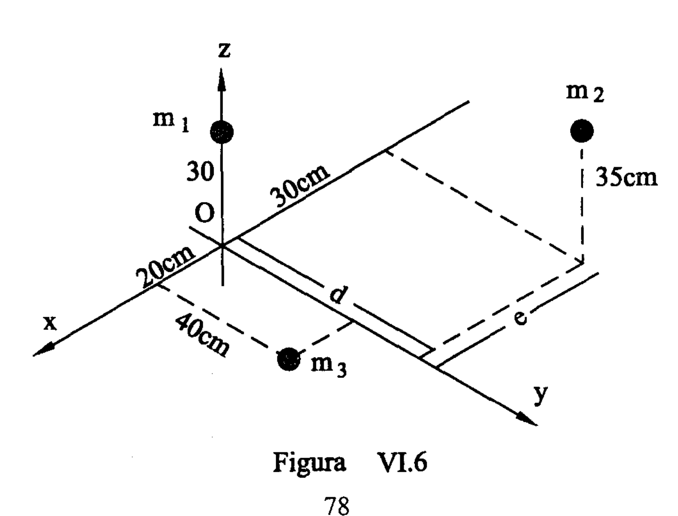


Figura VI.6

VI.7.-Dos partículas $\mathbf{m_A}$ **y** $\mathbf{m_B}$ **, de 8 y 4 kg** de masa, respectivamente, se unen mediante una barra de masa despreciable de **30 cm** de longitud, localizada en un plano horizontal liso y gira con una velocidad angular de **20 rad/s** en sentido de las manecillas del reloj. Además, la velocidad de A tiene una magnitud de **6 [m/s],** en la dirección que se indica; para estas condiciones, determine:

a).-la rapidez del centro de masa del sistema, y la rapidez de B, y

b).-el momento de inercia centroidal con respecto a un eje perpendicular al plano donde se encuentra el conjunto.

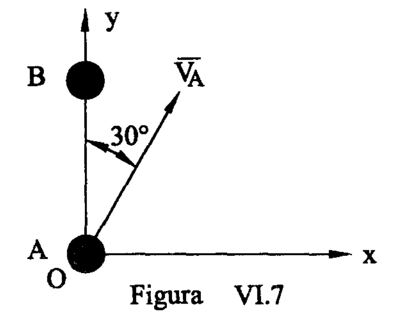


Figura VI.7

VI.8.-Tres barras del mismo material y de sección transversal constante están unidas como se indica en la figura; el sistema tiene una masa de **1 kg** y se encuentra en un plano horizontal liso. En t = 0 s, el sistema parte del reposo, el centro de masa del sistema se localiza en **(22/3,1) cm** y en el centro de masa de la barra de masa m_3 se aplica una **F = 30i N.** Para estas condiciones, determine:

a).-la masa de cada una de las barras,

b).-si el punto A tiene una aceleración de (39,22) m/s^2, la aceleración angular del sistema, y

c).-la variación de la cantidad de movimiento angular Hc, con respecto al centro de masa.

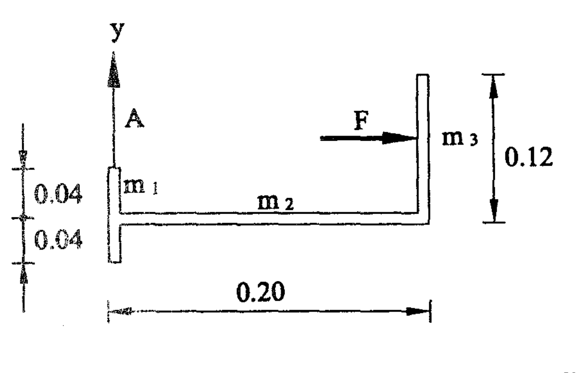


Figura VI.8 **dimensiones en m**

VI.9.-Un sistema formado por tres partículas, tiene las siguientes características:

Partícula	**masa kg**	**posición m**	**rapidez m/s**
A	6	(2, 2, -1)	3
B	4	(9, -6, -2)	11
C	2	(2,-10,-11)	15

Las velocidades de cada una de las partículas están dirigidas hacia el origen del sistema de referencia; en estas condiciones, determine:

a).-la energía cinética del centro de masa del sistema,

b).- la energía cinética del sistema, con relación al centro de masa, y

c).-la energía cinética total del sistema.

VI.10.-El sistema formado por tres partículas, ubicadas en la posición mostrada, tienen las velocidades $\mathbf{V_1}$ = **(-4,-3,0),** $\mathbf{V_2}$ = **(-2,2,1) y** $\mathbf{V_3}$ = **(15,8,0) m/s**. Su centro de masa poseé una energía cinética de 9.1 [J] y una velocidad **Vc = (-1.1,0.6, 0.5) m/s**. Para estas condiciones, obtenga:

a).-la energía cinética total del sistema, y

b).-la cantidad de movimiento angular con respecto al centro de masa.

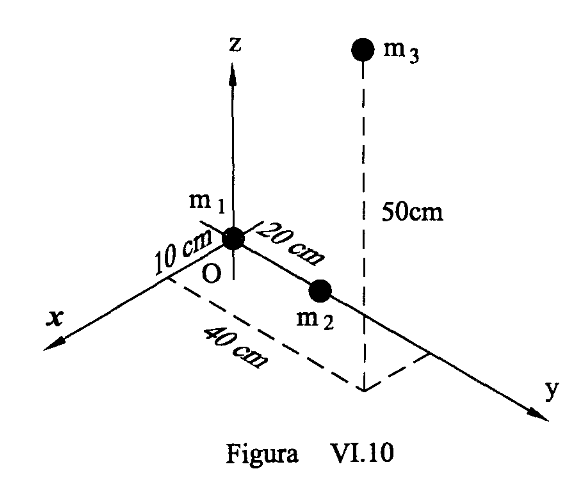


Figura VI.10

VI.11.-El sistema está formado por tres partículas, cuyas masa **son m_A = 400 g , m_B** y **m_C =300 g** , y en la posición que se muestra, las velocidades de cada una de las partículas están dirigidas hacia el centro del sistema de referencia y sus magnitudes son **v_A = 2 m/s, v_B = 3.6 m/s** y **v_C = 4 m/s**. Para dicha posición, obtenga:

a).-la energía cinética total del sistema,

b).-la energía cinética del sistema respecto al centro de masa,

c).-la energía cinética del centro de masa, y

d).-verifique que la suma de las energías correspondientes a los incisos b) y c) sea igual a la energía del inciso a).

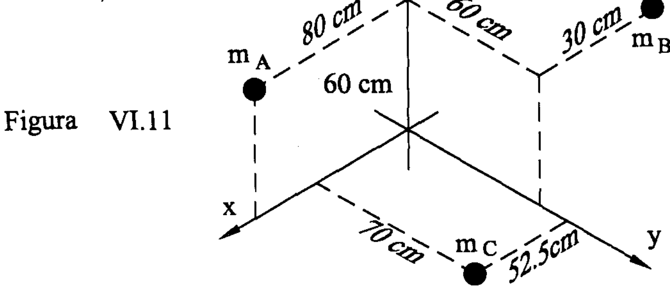


Figura VI.11

VI.12.-Un sistema formado por dos partículas, donde **m_B = 200 g,** están unidas por una barra rígida de masa despreciable y se mueven en un plano horizontal liso, de tal forma que la velocidad de su centro de masa es **Vc = (-0.5,-0.2) m/s**. La barra que los une gira con una velocidad angular constante de ω = **-2 k rad/s** y en t = 0 s, ocupa la posición mostrada. Determine:

a).-masa de la partícula A,

b).-la cantidad de movimiento angular respecto al centro de masa,

c).-la velocidad de cada una de las partículas para t = π /4 s, y

d).-la cantidad de movimiento angular con respecto al centro de masa para t = π /4 s Verifique que sea la misma que en el inciso b).

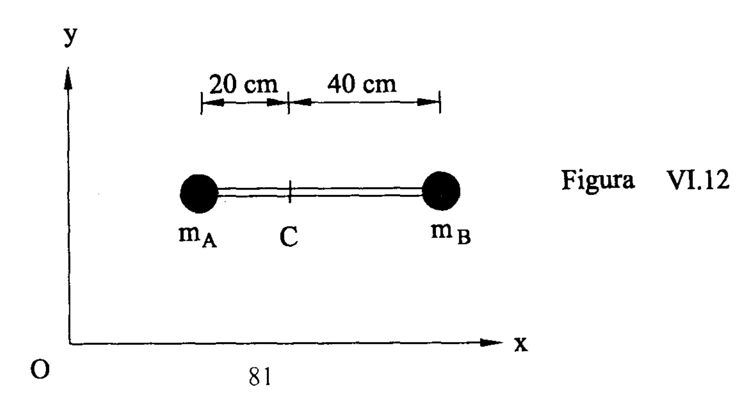


Figura VI.12

VI.13.-Determine la rapidez inicial **Vo** a la que debe lanzarse la pelota, para que después del rebote, alcance la altura a la cual se lanzó. Considere que el coeficiente de restitución **e = 0.5.**

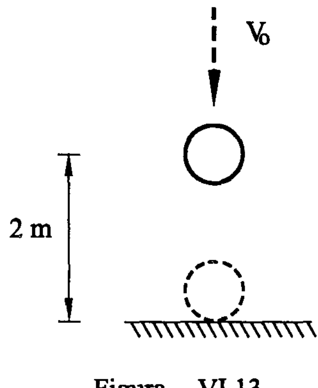


Figura VI.13

VI.14.-Dos péndulos de masas $\mathbf{m_A = 200}$ **y** $\mathbf{m_B = 100}$ **kg ,** $\mathbf{l_A = 1}$ **m y** $\mathbf{l_B = 0.134}$ **m**, se colocan como se muestra en la figura. Si **e = 0.5**, cuál deberá ser el ángulo θ_A al cual deberá desplazarse el péndulo A para que después de chocar con el péndulo B, desplace a éste 90 °. Además determine la pérdida de energía cinética.

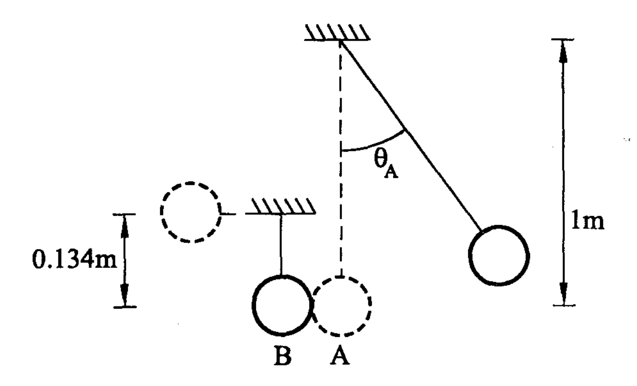


Figura VI.14

VI.15.-El sistema de la figura está formado por dos bloques, A de **2 kg** unido a un resorte lineal de **k = 721 N/m** y B de **1 kg** situado a **2 m** de A. Si en la posición mostrada el resorte se encuentra en su longitud natural y B se mueve en línea recta y hacia A sobre una superficie rugosa, con una rapidez de **5 m/s**. Determine la máxima deformación del resorte después del impacto de los bloques, si el coeficiente de restitución entre ellos es **e = 0.5** el coeficiente de fricción entre A y B y el plano horizontal vale **0.2**.

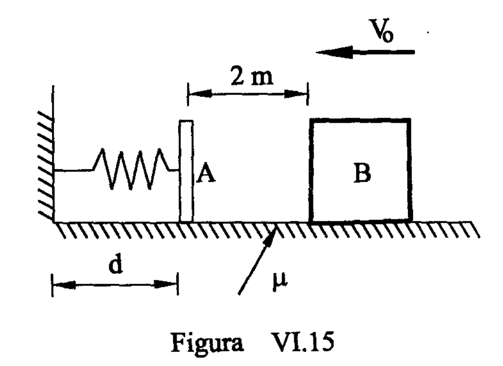


Figura VI.15

VI.16.- Dos esferas idénticas de radio **r** chocan; la esfera A se desplaza con una v_A = **4 m/s,** en tanto que B, inicialmente está en reposo; si el coeficiente de restitución es **0.6,** determine la rapidez de cada una de las esferas después del choque, cuando:

a).-d = r

b).-d = 0

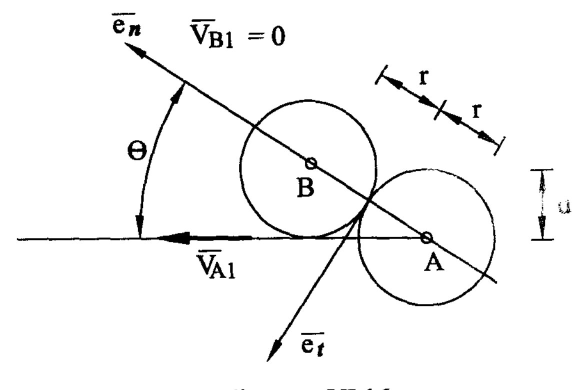


Figura VI.16

VI.17.-Para determinar en forma práctica el coeficiente de restitución entre dos cuerpos se hace lo siguiente: se deja caer la pelota sobre una superficie unida rígidamente a un plano inclinado fijo, tal como se muestra en la figura; posteriormente se mide la altura **h**, el ángulo de inclinación y la distancia **d**. Demuestre que el modelo matemático que determina el coeficiente de restitución en función de ésas variables está dado por:

$$\mathbf{e^2 + e(1 - \tan^2\theta) + dg/2v_o^2 \operatorname{sen}\theta\cos^3\theta = 0}$$

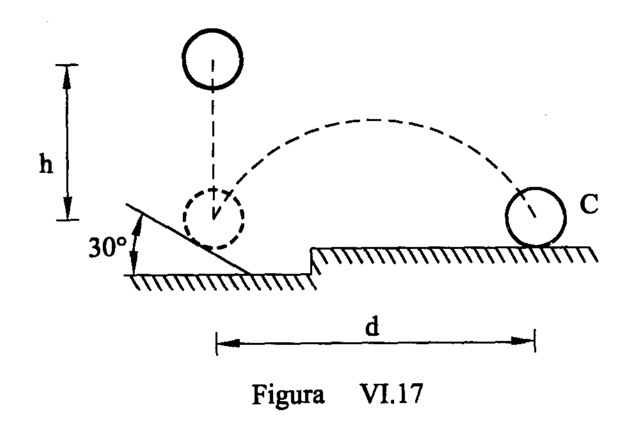


Figura VI.17

VI.18.-Una bola de billar A se impacta contra la banda de la mesa con una v_o, en la dirección mostrada. Si **e = 0.7**, **r = 0.04 m**, para ambas bolas y **a = 0.4 m** y el efecto de fricción entre la banda y la bola A son despreciables. Determine:

a).-el valor de la distancia b, a la que deberá colocarse el centro de la bola B, de tal manera que se garantice un choque central directo entre ambas bolas,

b).-el rango de valores de b para que se tenga un choque central oblícuo, y

c).-el porcentaje de la pérdida de energía cinética en este proceso.

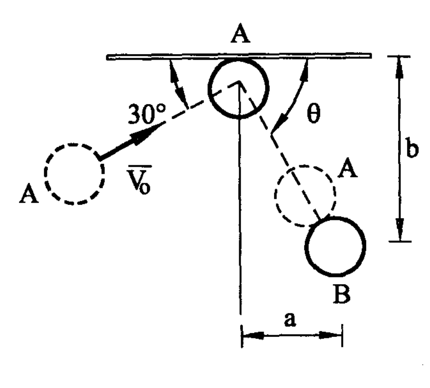


Figura VI.18

VI.19.-Una pelota de **1 kg** se deja caer desde una altura de 3 m sobre una cuña de **2 kg**, tal como muestra la figura; después del impacto se observa que la cuña se mueve hacia la izquierda cierta distancia d. Si **e** = **0.7**, el coeficiente de fricción entre la cuña y el piso es **0.2** y entre la superficie inclinada y la pelota el efecto de fricción es despreciable, determine:

a).-la distancia d que recorre la cuña hacia la izquierda, y

b).-la rapidez de la pelota inmediatamente después de golpear a la cuña.

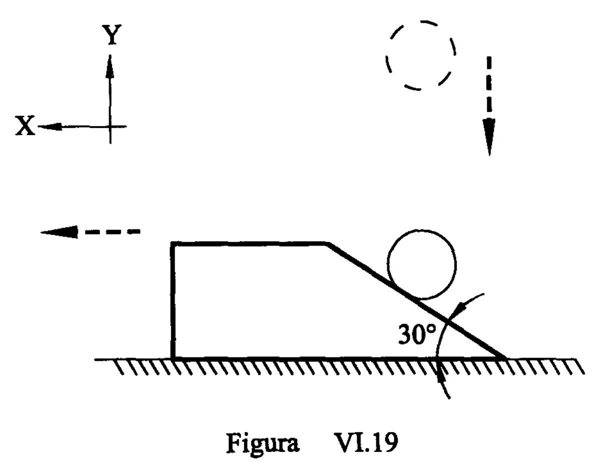


Figura VI.19

11 Problema de dinámica de sistemas de partículas

El cuerpo rígido y homogéneo mostrado, puede modelarse como la unión de dos cilindros formados por sistemas de partículas uniformemente distribuidas. A partir de esta idea, y considerando que el cuerpo metálico tiene una densidad de **8 kg/dm^3**, una masa total de **37.2 kg** y su centro de masa se encuentra ubicado en la posición indicada, determine:

a).-el radio $\mathbf{r_1}$ del cilindro horizontal, y

b).-la altura $\mathbf{h_2}$ del cilindro vertical.

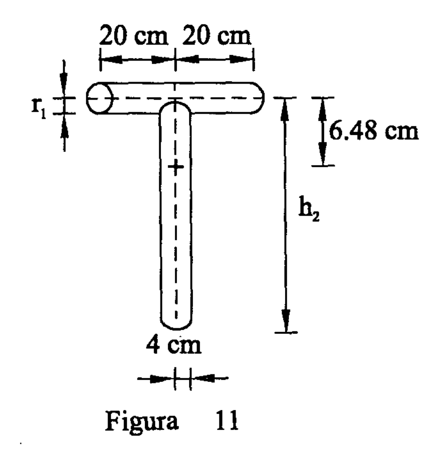


Figura 11

Resolución:

1.-Obtención de las masas de los dos cilindros:

$$\mathbf{m = \rho V}$$

$$\mathbf{m_1 = 8\,(\,\pi r_1^{\,2}\,)\,4 = 32\,\pi r_1^{\,2}}$$

$$\mathbf{m2 = 8\,(\,\pi\,0.4^2\,)\,h_2 = 1.28\,\pi\,h_2}$$

$$\mathbf{m_T = 32\,\pi r_1^{\,2} + 1.28\,\pi\,h_2}$$

$$\mathbf{pero\ m_T = 37.2\ kg}$$

$$\mathbf{37.2 = 32\,\pi r_1^{\,2} + 1.28\,\pi\,h_2} \qquad \mathbf{...(1)}$$

2.-Obtención del centro de masa del sistema:

$$yc = \Sigma\ miyi/m_T$$

y considerando que el origen del sistema de referencia coincide con el centro del cilindro (1):

$$yc\ m_T = \Sigma\ miyi$$

$$-0.648\ (37.2) = = 32\ \pi r_1^2\ (0) + 1.28\ \pi\ h_2\ (-1)\ (0.5\ h_2 + r_1)$$

realizando operaciones y cambio de signos:

$$24.1056 = 2.0106\ h_2^2 + 4.0212 h_2 r_1 \qquad ...(2)$$

dividiendo la ecuación (2) entre 24.1056 y ordenando los términos:

$$0.0834 h_2^2 + 0.1668 h_2 r_1 = 1 \qquad ...(3)$$

de (1) $h_2 = (1-2.7024 r_1^2)/0.1081$, **en** ...(3)

$$0.0834\ (1-2.7024 r_1^2)^2/0.1081^2 + 0.1668 r_1\ (1-2.7024 r_1^2)\ /\ 0.1081 = 1$$

realizando operaciones:

$$7.137\ (1-5.4048 r_1^2 + 7.303\ r_1^4) + 1.543 r_1\ (1-2.7024 r_1^2) = 1$$

quitando paréntesis y ordenando términos:

$$52.1215\ r_1^4 - 4.1698\ r_1^3 - 38.5741\ r_1^2 + 1.543\ r_1 + 6.137 = 0 \qquad ...(4)$$

resolviendo la ecuación, una de las raíces es :

$r_1 = 0.5$ **dm, y substituyendo en (1),** $h_2 = 3$ **dm**

12 Problema de dinámica de sistemas de partículas

Para el problema VI.3.-, utilizando los datos propuestos y los resultados obtenidos, determine.

a).-la fuerza resultante que actúa en el sistema de partículas,

b).-la cantidad de movimiento angular con respecto al origen del sistema, y

c).-la cantidad de movimiento angular con respecto al centro de masa.

Resolución:

a) $\mathbf{F = ma = \Sigma m_i\, a_i}$

$\mathbf{F = 10\,(\,0.1i + 0.8\,j - 0.5\,k\,)}$

$\mathbf{F = 1i + 8\,j - 0.5\,k}$ **N**

b) $\mathbf{H_o = \Sigma\, r \times mv}$

$\mathbf{H_{o1} = 0 \times 2\,(\,2\,, -4, 0\,) = 0}$

$\mathbf{H_{o2} = (\,4, 3, 0\,) \times 3\,(\,-1, -3, 4\,) = 36\,i - 48\,j - 27\,k}$

$\mathbf{H_{o3} = (\,-6, 6, 3\,) \times 5\,(\,3, 0, -2\,) = -60\,i - 15j - 90\,k}$

$\mathbf{H_o = -24\,i - 63\,j - 117\,k}$ $\mathbf{kgm^2/s}$

c) $\mathbf{H_c = \Sigma\, r_{cn} \times m_n v_n}$

$\mathbf{r_{cn} = r_n - r_c}$

$\mathbf{r_{c1} = r_1 - r_c = 0 - (\,-1.8, 3.9, 1.5\,) = (\,1.8, -3.9 - 1.5\,)}$

$\mathbf{r_{c2} = r_2 - r_c = (4, 3, 0\,) - (\,-1.8, 3.9, 1.5\,) = (\,5.8, -0.9, -1.5\,)}$

$\mathbf{r_{c3} = r3 - r_c = (\,-6, 6, 3\,) - (\,-1.8, 3.9, 1.5\,) = (\,-4.2, 2.1, 1.5\,)}$

$\mathbf{Hc_1 = (\,1.8, -3.9 - 1.5\,) \times 2\,(\,2, -4, 0\,) = (\,-12, -6, 1.2\,)}$

$\mathbf{Hc_2 = (\,5.8, -0.9, -1.5\,) \times 3\,(\,-1, -3, 4\,) = (\,-24.3, -65.1, -54.9\,)}$

$\mathbf{Hc_3 = (\,-4.2, 2.1, 1.5\,) \times 5\,(\,3, 0, -2\,) = (\,-21, -19.5, -31.5\,)}$

$\mathbf{H_c = -57.3i - 90.6\,j - 85.2\,k}$ $\mathbf{kg\,m^2/s}$

13 Problema de dinámica de sistemas de partículas

Con relación a los datos y resultados del problema VI.6, y sabiendo que sobre $\mathbf{m_1}$ actúa F_1 = (4 , -8, 2) N, sobre $\mathbf{m_2}$, actúa F_2 = (-5, 0, 6) N y la aceleración de $\mathbf{m_3}$ es a_3 = (2, -4, -6) m/s^2, determine:

a).-la aceleración del centro de masa, y

b).-la cantidad de movimineto angular del sistema, con respecto al origen.

Resolución

a)

$$\mathbf{m_T ac = \Sigma m_i\, a_i} \qquad \ldots (1)$$

$$\mathbf{a_1 = F_1 / m_1 = (4i - 8j + 2k) / 5}$$

$$\mathbf{a_2 = (-5i + 0j + 6k) / 2}$$

$$\mathbf{a_3 = 2i - 4j - 6k}$$

en (1) :

$$\mathbf{(5 + 2 + 3)\, a_c = 5(4i - 8j + 2k)/ 5 + 2(-5i + 0j + 6k)/ 2 + 3(2i - 4j - 6k)}$$

$$\mathbf{10\, a_c = 5i - 20j - 10k}$$

$$\mathbf{a_c = 0.5\, i - 2j - k \qquad m/s^2}$$

b)

$$\mathbf{Ho = r \; x \; m\, v}$$

$$\mathbf{Ho_1 = (0i + 0j + 0.3k)\; x\; 5 (2i + 4j + 5k) = -6i + 3j}$$

$$\mathbf{Ho_2 = (-0.5i + 0.6j + 0.35k)\; x\; 2 (-4i + 0j + k) = 1.2i - 1.8j + 4.8\, k}$$

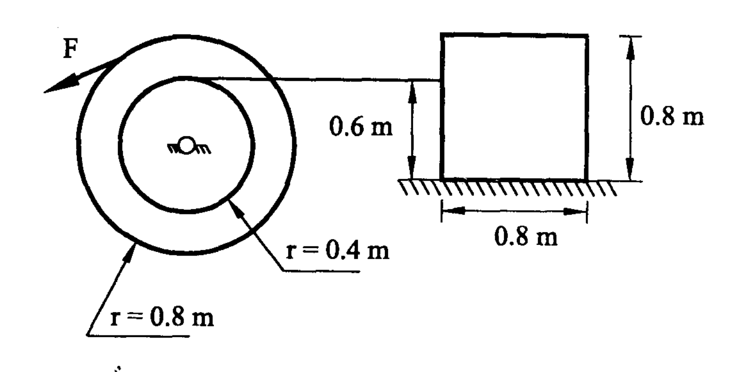
$$\mathbf{Ho_3 = (0.2i + 0.4j + 0k)\; x\; 3 (3i + 4j - 2k) = -2.4i + 1.2j - 1.2k}$$

$$\mathbf{Ho = \Sigma\, Ho_i}$$

$$\mathbf{Ho = -7.2i + 2.4j + 3.6\, k \qquad kg\, m2 /s}$$

SERIE VII

CUERPO RÍGIDO



Ecuaciones de movimiento

VII.1.-El bloque de **400 N** de peso, se somete a la acción de una fuerza horizontal y constante de **150 N.** Si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es **0.5,** determine:

a).-el mínimo valor de "b" para que el bloque esté a punto de volcar, y

b).-la aceleración del bloque.

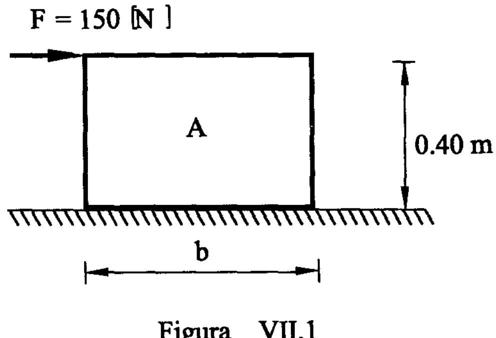


Figura VII.1

VII.2.-Un cajón de **100 N** parte del reposo sobre un plano inclinado, soportado por apoyos de tamaño despreciable que hacen contacto con dicho plano; si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto vale **0.5**, determine:

a).-las magnitudes de las reacciones en los apoyos traseros y delanteros, y

b).-la aceleración del cajón.

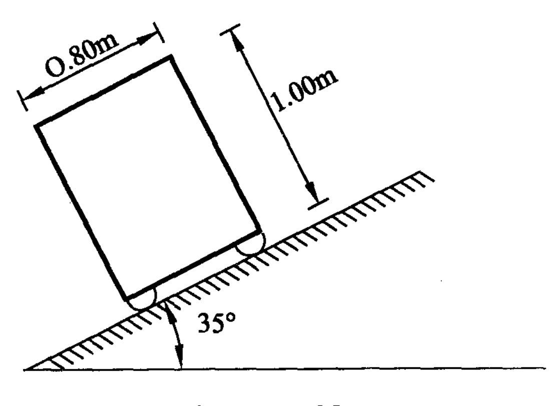


Figura VII.2

VII.3.-Para el problema anterior, explique brevemente si existe un valor de $\theta < 90°$, en donde θ es el ángulo que forma el plano inclinado con la horizontal para el cual, las reacciones traseras serán nulas; en caso de no existir, ¿cuáles son las variables que determinan el comportamiento pedido?

VII.4.-El bloque de **200 N** que se muestra en la figura, se somete a la acción de una fuerza ***P(t)***, aplicada en forma indirecta por medio de un cable, cuyo comportamiento se muestra en la gráfica VII.4.2. Si se considera que el bloque no debe volcarse y que el coeficiente entre las superficies en contacto **es 0.5,** determine:

a).- el valor máximo de Po, y

b).-el intervalo en el cual el bloque se encuentra en movimiento.

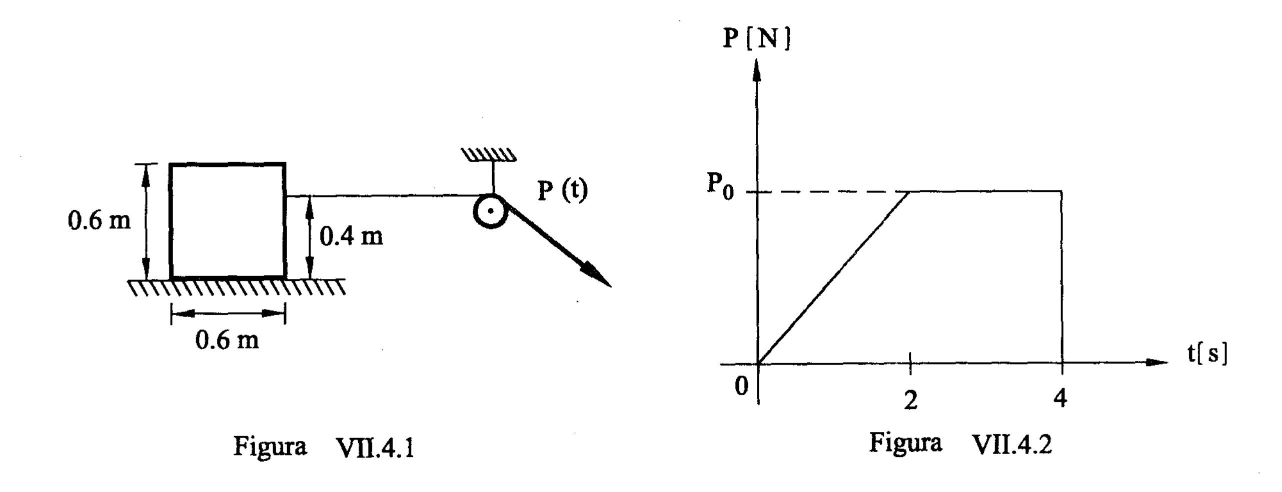


Figura VII.4.1 Figura VII.4.2

VII.5.-Un vehículo de prueba para carrera de "arrancones", requiere que su turbina ejerza el máximo empuje, para lograr la máxima rapidez en el intervalo **[0,5]** s, sin que exista problema de volcamiento. La turbina ejerce un empuje en función del tiempo, dada por la gráfica anexa. Si **W=30 kN,** y el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es **0.8**, determine:

a).-la magnitud de Fo,

b).-la velocidad máxima, y

c).-el impulso ejercido por la turbina en el intervalo [0, 5] s.

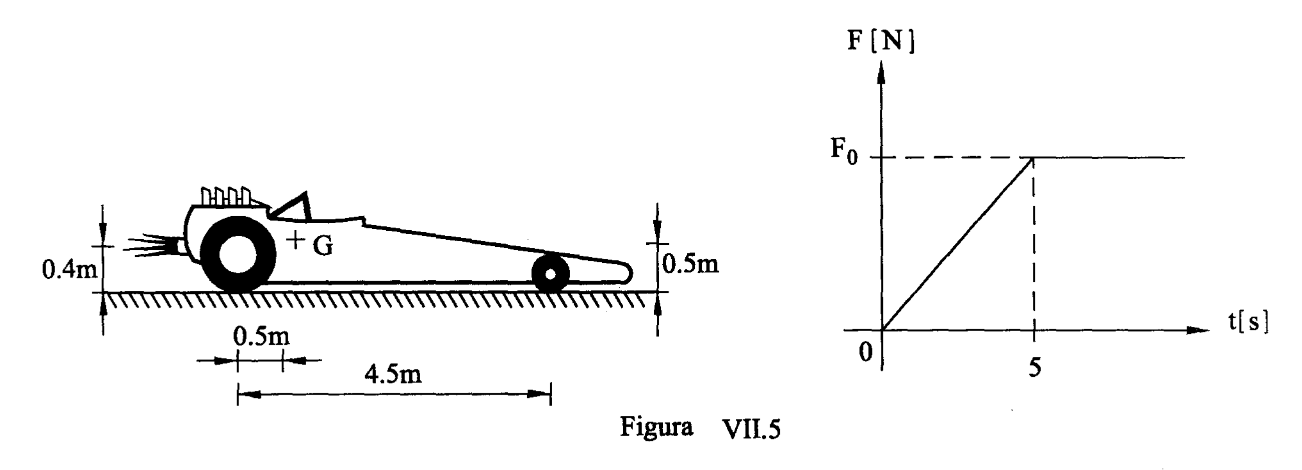


Figura VII.5

VII.6.-Una barra homogénea de **1 m** de longitud y **40 N** de peso, se sujeta por medio de dos cables de igual longitud en un plano vertical, tal como se muestra; los extremos de los cables que sostienen a la barra se encuentran sobre una misma línea horizontal. Si en el instante en que se suelta θ = **30°**, determine:

a).-la aceleración de la barra, y

b).-las tensiones en los hilos.

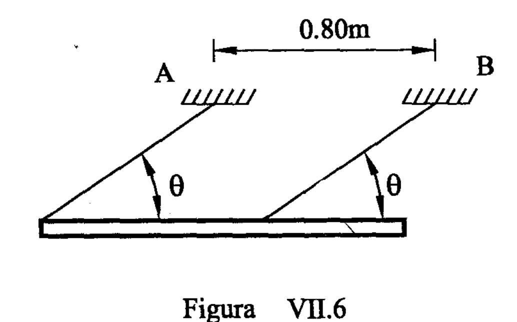


Figura VII.6

VII.7.-La placa rectangular de **50 N** de peso, se encuentra sostenida por dos barras delgadas articuladas en sus extremos y de masa despreciable, según indica la figura. En la posición mostrada, la barra OA gira con rapidez angular de **10 rad/s** en sentido antihorario. Para dicha posición, determine:

a).-las reacciones en las articulaciones A y B, y

b).-la aceleración de la placa.

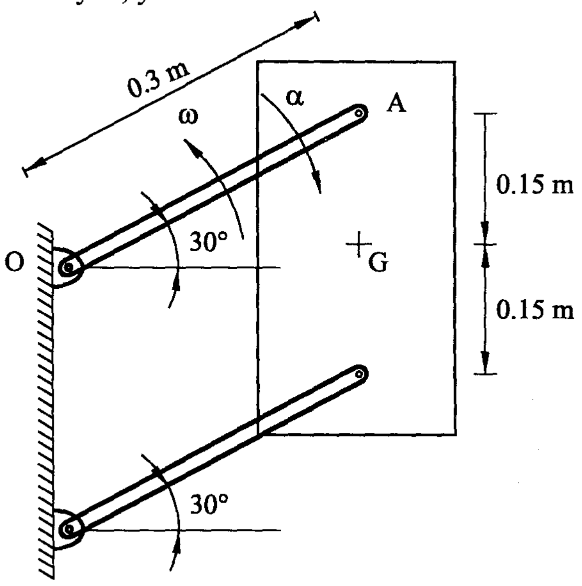


Figura VII.7

VII.8.-El sistema mecánico está formado por los bloques A y B, de igual peso $\mathbf{W_A = W_B}$ **y equivalente a 100 N,** unidos por una cuerda flexible, inextensible y de masa despreciable. Si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es **0.2** y al bloque B se le aplica una fuerza **P,** determine:

a).-el valor máximo de P, para que el bloque A no vuelque, y

b).-la aceleración de los bloques.

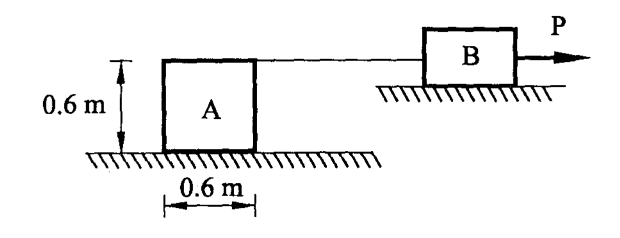


Figura VII.8

VII.9.-La polea que se muestra, de **40 N** de peso, se puede considerar como un disco que gira alrededor de un eje que pasa por "O". Si se le aplica una fuerza **P = 20 N,** según se indica, determine su rapidez después de haber girado 10 vueltas, partiendo del reposo.

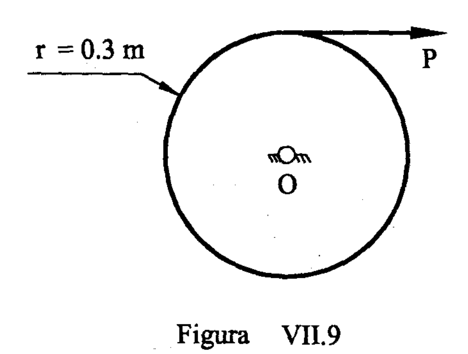


Figura VII.9

VII.10.-Un cuerpo formado por dos barras delgadas rígidamente unidas, se suspende del pasador "O", según se muestra en la figura. Si las barras pesan **100 N/m**, y se aplica una fuerza horizontal de **600 N** de magnitud, determine la altura H a la que debe aplicarse, para que la reacción horizontal en el pasador sea nula.

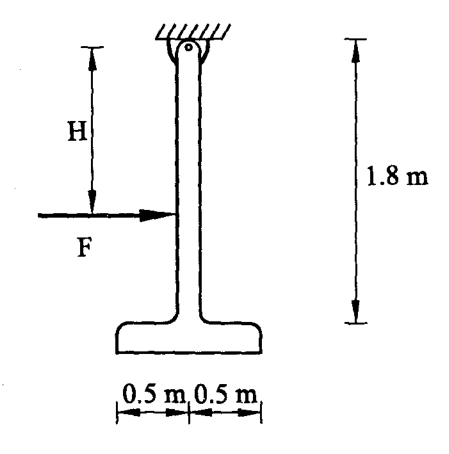


Figura VII.10

VII.11.-La barra homogénea de **0.80 m** de longitud se encuentra articulada en su extremo superior "O" y se suelta desde el reposo, en posición horizontal; al llegar a la posición vertical, choca contra la clavija A. Determine:

a).-la altura h, necesaria para que la reacción en la articulación sea mínima, y

b).-la reacción en la articulación.

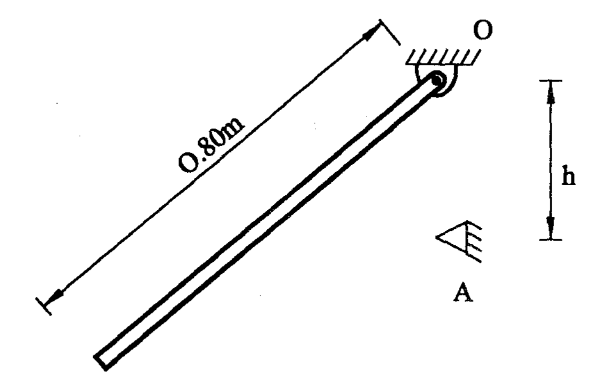


Figura VII.11

VII.12.-Una barra delgada de **100 N** de peso y **0.80** m de longitud, se articula en uno de sus extremos, manteniendo su posición (1) vertical, tal como muestra la figura. En dicha posición, se le aplica un par **M**, cuyo comportamiento en función de θ, se muestra en el gráfico anexo. Para cuando la barra llegue a la posición (2) dada, determine:

a).-la magnitud de Mo, y

b).-la reacción total en el pasador.

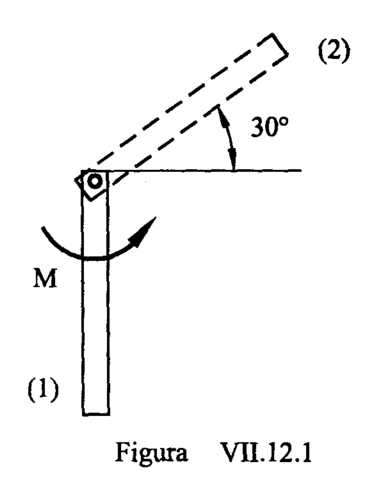


Figura VII.12.1

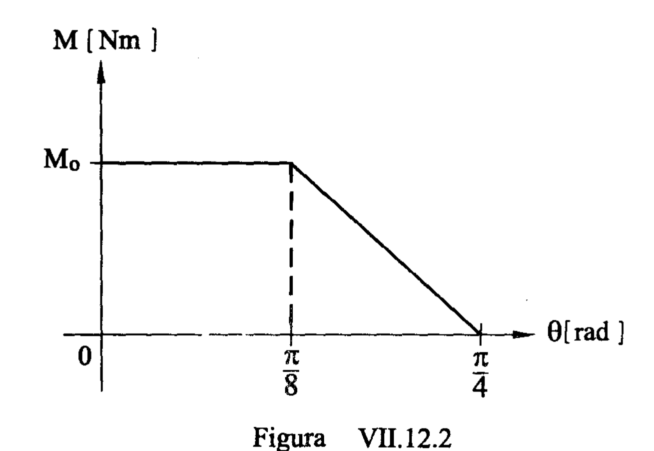


Figura VII.12.2

VII.13.-Dos barras en forma de T invertida, formada por dos segmentos AB y CD de **8 kg** y **6 kg** de masa, respectivamente, está articulada en "O" y se encuentra en reposo en la posición mostrada. Se somete a la acción de un par **M** = **k**θ Nm, en donde k es una constante y θ el giro en rad, que provoca que cuando la barra gire cuatro vueltas, su rapidez angular sea de **1375 rpm.** Determine:

a).-la constante k, y

b).-la reacción en el pasador cuando ha girado las cuatro vueltas.

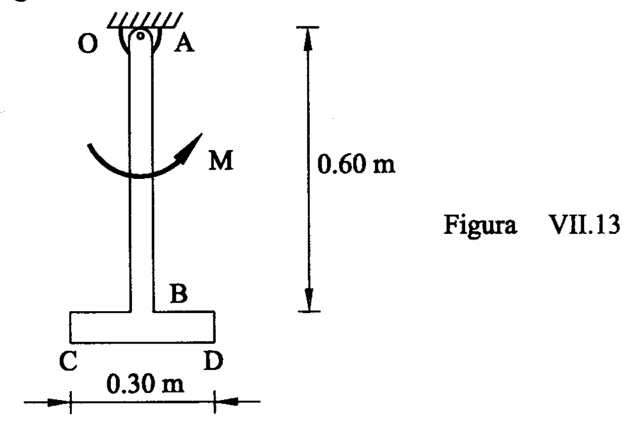


Figura VII.13

VII.14.-Una polea doble de **20 kg** está sujeta a la acción de una fuerza vertical de **100 N** y a un bloque de peso W colgado mediante una cuerda flexible inextensible y de masa despreciable. Si el momento de inercia de la polea doble respecto a su eje de rotación es I= $0.5mr^2$, determine el peso **W** para que la polea gire en sentido antihorario con α = **1 rad/s^2**.

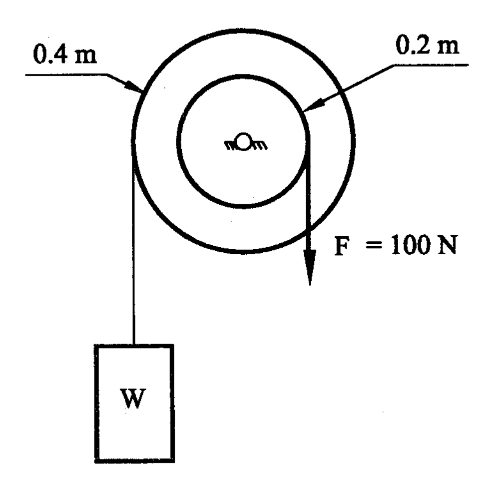


Figura VII.14

VII.15.- El sistema mecánico está formado por una polea doble, semejante a un disco y un bloque de **80 y 40 N** de peso, respectivamente, unidos por una cuerda flexible, inextensible y de masa despreciable. Si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es **0.4,** la polea gira con respecto a su eje de rotación liso y el sistema se suelta desde el reposo, determine:

a).-la aceleración de la polea, y

b).-la fuerza F necesaria para que el bloque no vuelque.

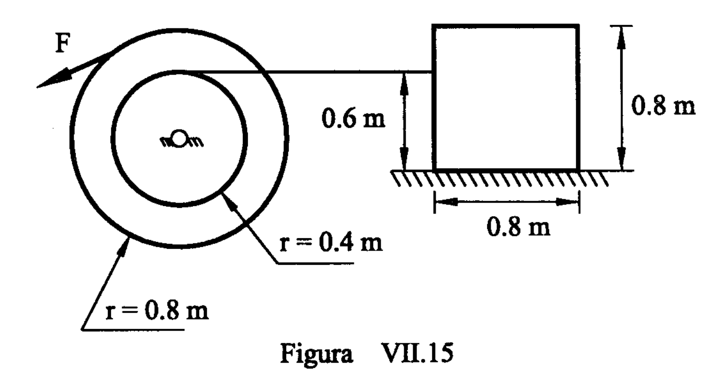


Figura VII.15

VII.16.- El sistema mecánico está formado por una polea doble y dos bloques A y B de **1000 , 500 y 300 N** de peso, respectivamente, unidos por dos cuerdas flexibles, inextensibles y de masa despreciable, según se muestra. Si la polea tiene un radio de giro $\mathbf{k_c = 0.40\ m}$**,** respecto a su eje de rotación y el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es **0.2,** determine la magnitud de la fuerza P necesaria para que el bloque A ascienda 2 m en 3 s, partiendo del reposo.

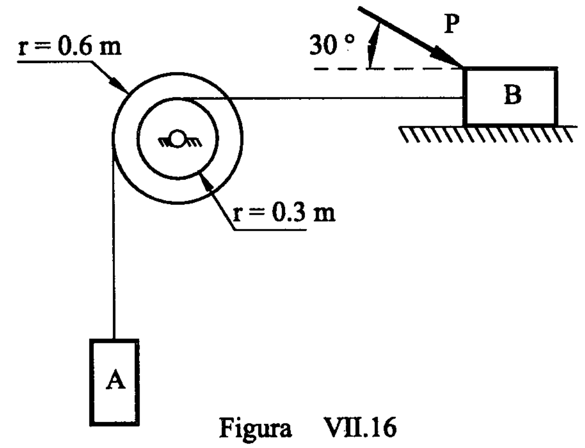


Figura VII.16

VII.17.-Un disco de **400 N** de peso y **0.20 m** de radio, rueda sin resbalar hacia arriba del plano inclinado y rugoso, según indica la figura. Si la aceleración angular del disco es α = **5g rad/s²**, para g en m/s² en sentido horario, determine ·

a).-la magnitud del par M constante, y

b).-la magnitud de la fuerza de fricción.

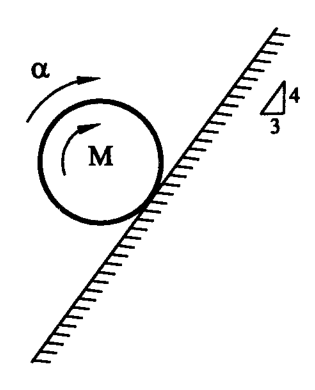


Figura VII.17

VIII.18.-La barra delgada y homogénea pesa **49 N** y se apoya sobre los planos lisos horizontal y vertical, encontrándose temporalmente en reposo, cuando se le aplica una fuerza horizontal y constante **P = 20 N,** como se indica en la figura. Para la posición mostrada, determine:

a).-la aceleración angular de la barra, y

b).-la magnitud de las reacciones sobre los extremos de la barra.

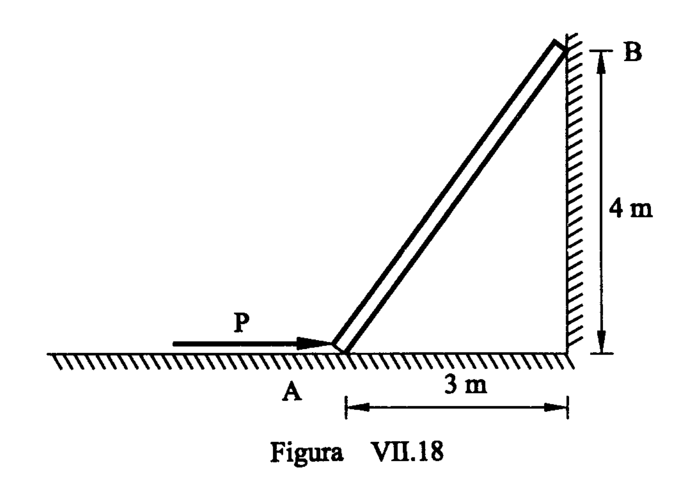


Figura VII.18

VII.19.- El sistema mecánico está formado por una polea doble y un bloque de **400 y 200 N** de peso, respectivamente, unidos por una cuerda flexible, inextensible y de masa despreciable. Si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es **0.6**, la polea rueda sin resbalar y tiene un radio de giro $\mathbf{k_c = 0.3\ m}$, respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento y que pasa por su centro de masa y al bloque B se le aplica una fuerza P, determine la magnitud de P para que el centro de masa de la polea tenga una aceleración de $\mathbf{2\ m/s^2}$ de magnitud.

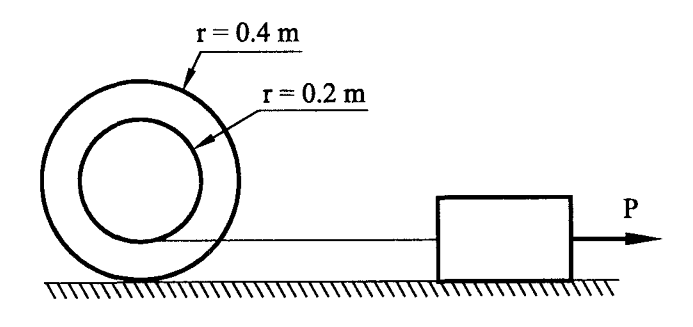


Figura VII.19

VII.20.- El sistema mecánico está formado por un disco ranurado **A de 80 N** y un bloque **B**, unidos por una cuerda flexible, inextensible y de masa despreciable, que pasa por una pequeña polea fija y sin fricción. Si el disco rueda sin resbalar y tiene un radio de giro $\mathbf{k_c}$ = **0.25 m**, respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento y que pasa por su centro de masa y en este punto se le aplica una fuerza horizontal **F = 40 N**; además, se sabe que la magnitud de la aceleración tangencial del punto P (el más alto en la posición mostrada) es constante y vale **3.307 m/s²**, determine :

a).-la aceleración angular del disco,

b).-la magnitud de la fuerza de tensión en la cuerda,

c).-el mínimo valor de μ, para que este movimiento suceda, y

d).-el peso del bloque B.

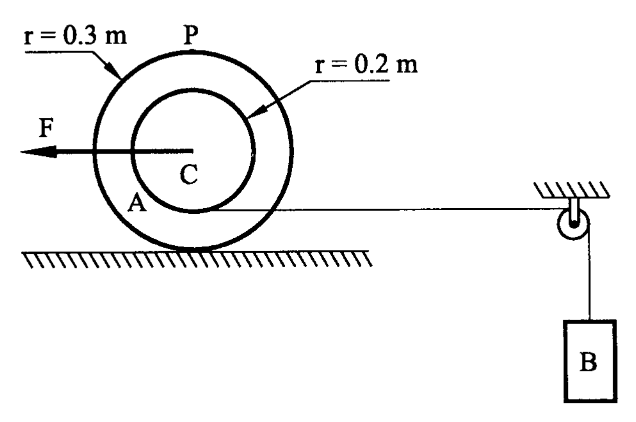


Figura VII.20

VII.21.- El sistema mecánico está formado por un disco ranurado A y un bloque B **de 500 y 1000 N** de peso, respectivamente, unidos por una cuerda flexible, inextensible y de masa despreciable, que pasa por una pequeña polea fija y sin fricción. Si el disco rueda sin resbalar y tiene un radio de giro $\mathbf{k_c = 0.30\ m}$, respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento y que pasa por su centro de masa y el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es **0.6,** determine la magnitud de la fuerza P necesaria, para que el bloque adquiera una rapidez de **4 m/s** cuando se ha desplazado **2 m**, partiendo del reposo.

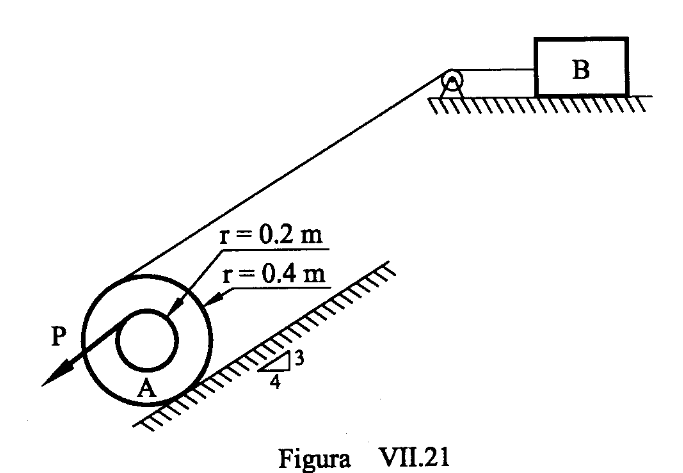


Figura VII.21

VII.22.-El sistema mecánico está formado por un disco y un bloque de **200 y 100 N** de peso, respectivamente, unidos mediante un hilo flexible, inextensible y de masa despreciable, que pasa a través de una pequeña polea sin fricción; si el coeficiente de fricción entre el plano inclinado y el bloque es **0.6,** el sistema parte del reposo, y el disco rueda sin deslizar, determine la magnitud de la fuerza horizontal y constante **F**, aplicada en el centro de masa del disco, que provocará que después de haber transcurrido **3 s**, el bloque adquiera una rapidez de **4 m/s.**

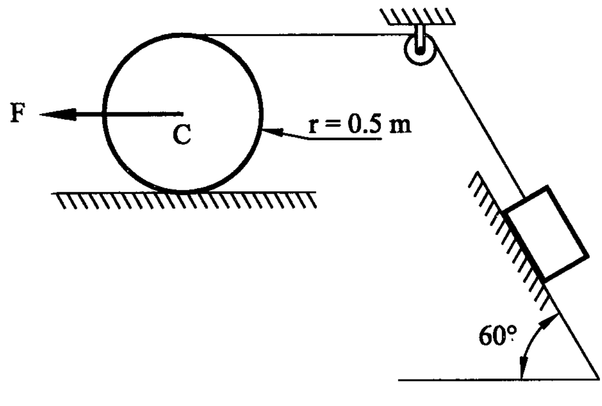


Figura VII.22

14 Problema de dinámica del cuerpo rígido: traslación rectilínea

Un automóvil para carreras tiene una masa **m = 1200 kg** y su centro de masa se encuentra en **G**, como se muestra en la figura.

Si las ruedas traseras son las motrices y se considera que la masa de todas las ruedas es despreciable, determine la magnitud de la aceleración máxima que puede imprimírsele al automóvil sin que se despeguen las ruedas delanteras.

Dimensiones, en m

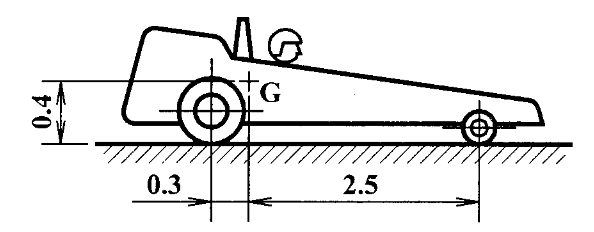
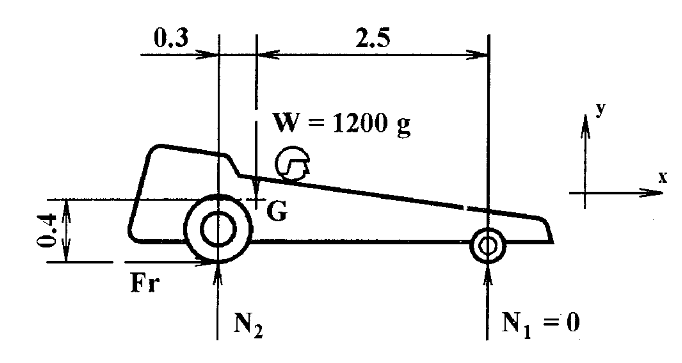


Diagrama de cuerpo libre



Dimensiones, en m

ΣF_x: $\quad \mathbf{Fr = m\, a_G}$

ΣF_y: $\quad \mathbf{N_2 - W = 0;} \qquad\qquad \mathbf{N_2 = 11{,}760\ N}$

$\circlearrowleft^{+}\ \Sigma M_G$: $\quad \mathbf{0.4\ Fr - 0.3\ N_2 = 0}$

de donde:

$$\mathbf{Fr = \frac{(0.3)(11{,}760)}{0.4};} \qquad\qquad \mathbf{Fr = 8820\ N}$$

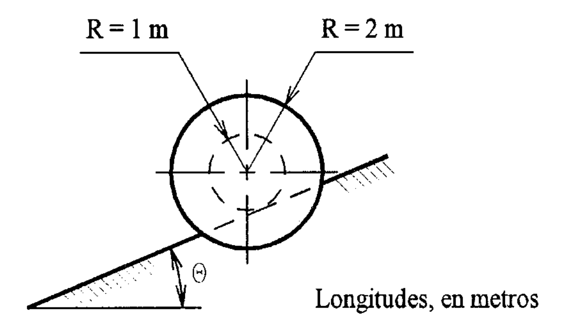
y por lo tanto:

$$\mathbf{a_G = \frac{Fr}{m};} \qquad\qquad \mathbf{a_G = \frac{8820}{1200}}$$

$$\boxed{\mathbf{a_G = 7.35\ m/s^2}}$$

15 Dinámica del cuerpo rígido: movimiento plano general

El carrete de la figura tiene una masa **m = 50 kg** y un radio de giro con respecto a su centro de masa **k_G = 1 m**, y se le suelta a partir del reposo desde la posición mostrada.

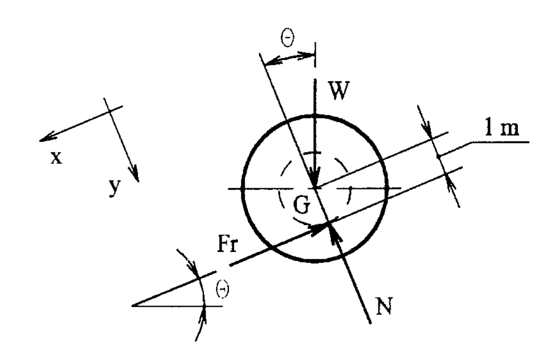


Bajo estas condiciones, determine:

a) el valor máximo del ángulo **Θ** que forma el plano inclinado con la horizontal para que el carrete pueda rodar sin deslizar, considerando un coeficiente de fricción entre las superficies en contacto **μ = 0.2**;

b) el tiempo que tarda el carrete en recorrer una distancia **d = 10 m** a lo largo del plano inclinado así como su rapidez angular en ese instante, si los valores del ángulo y del coeficiente de fricción fueran **Θ = 20°** y **μ = 0.25**.

Diagrama de cuerpo libre



ΣF_x: $\quad \mathbf{W\ sen\ \Theta - Fr = m\ a_x}$

ΣF_y: $\quad \mathbf{W\cos\Theta - N = 0}$; $\qquad \mathbf{N = W\cos\Theta}$

$\circlearrowleft(+)\ \Sigma M_G$: $\quad \mathbf{Fr = I_{GG}\ \alpha}$

a) si el carrete rueda sin deslizar, $\mathbf{a_x = \alpha\ r}$

$$\mathbf{a_x = \alpha} \qquad (1)$$

para el caso extremo, **Fr = Fr'**

Fr' = μ N; $\qquad$ **Fr' = 0.2 W cos Θ**

por tanto:

$\mathbf{W\ sen\ \Theta - 0.2\ W\ cos\ \Theta = m\ \alpha;}$ dividiendo por **m**:

$$\mathbf{g\ sen\ \Theta - 0.2\ g\ cos\ \Theta = \alpha} \qquad (2)$$

además:

$\mathbf{0.2\ W\ cos\ \Theta = I_{GG}\ \alpha;}$ $\mathbf{0.2\ W\ cos\ \Theta = m\ (1)^2\ \alpha}$

$$\mathbf{0.2\ g\ cos\ \Theta = \alpha} \qquad (3)$$

sustituyendo (1) en (3), y luego en (2):

$\mathbf{g\ sen\ \Theta - \alpha = \alpha;}$ $\mathbf{g\ sen\ \Theta = 2\ \alpha}$ (4)

dividiendo (4) por (3):

$$\frac{\mathbf{g\ sen\ \Theta}}{\mathbf{0.2\ g\ sen\ \Theta}} = \frac{\mathbf{2\ \alpha}}{\mathbf{\alpha}}; \qquad \mathbf{5\ tan\ \alpha = 2}$$

$$\mathbf{\Theta = áng\ tan\ \frac{2}{5}}; \qquad \boxed{\mathbf{\Theta = 21.80°}}$$

b) si $\mathbf{\Theta = 20°}$ y $\mathbf{\mu = 0.25}$, las ecuaciones quedan:

$\mathbf{W\ sen\ 20° - Fr = m\ a_x}$

$\mathbf{W\ cos\ 20° - N = 0;}$ $\mathbf{N = 0.9397\ W}$

$\mathbf{Fr = m\ \alpha}$

$\mathbf{a_x = \alpha}$

$\mathbf{0.3420\ W - m\ \alpha\ =\ m\ \alpha;}$ $\mathbf{0.3420\ g\ =\ 2\ \alpha}$

$\boxed{\mathbf{\alpha = 1.676\ rad/s^2}}$ $\boxed{\mathbf{a_x = 1.676\ m/s^2}}$

por tanto, **Fr = 83.79 N**, valor que es menor a **Fr' = 0.25 N**, donde

N = 460.4 N y **Fr' = 115.1 N**

Considerando que para $\mathbf{t = 0\ s}$, $\mathbf{x_0 = 0\ m}$ y $\mathbf{v_0 = 0\ m/s}$:

$$\mathbf{\frac{dv_x}{dt} = 1.676} \qquad \mathbf{\int_0^{v_x} dv_x = \int_0^t 1.676\, dt}$$

$\mathbf{v_x = 1.676\ t}$

$$\frac{dx}{dt} = 1.676\,t \qquad \int_0^{10} dx = \int_0^{t_f} 1.676\,t\,dt$$

$$10 = 0.8380\,t_f^2; \qquad t_f^2 = \frac{10}{0.8380}$$

$$t_f = \sqrt{11.93} \qquad \boxed{t_f = 3.455 \text{ s}}$$

para este valor:

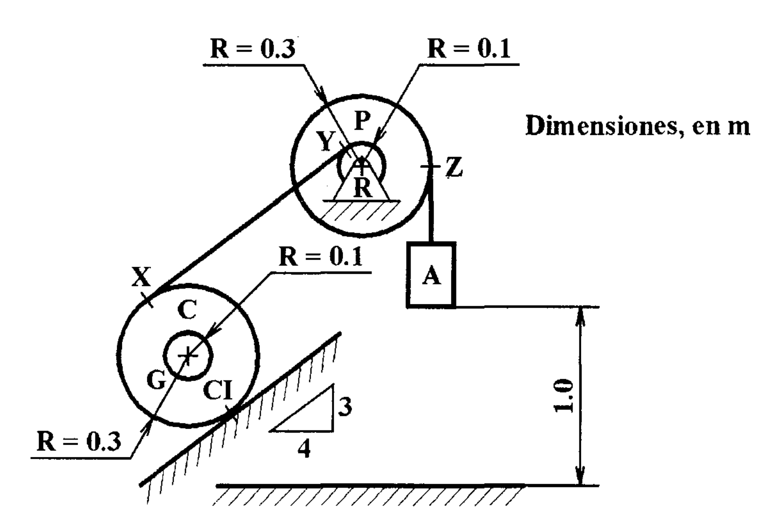
$$v_x = 1.676\,(3.455); \qquad \boxed{v_x = 5.789 \text{ m/s}}$$

y como $\mathbf{r = 1}$ **m** y $v_{x,f} = \omega_f\, r$

$$\boxed{\omega_f = 5.789 \text{ rad/s}}$$

16 Problema de dinámica de cuerpos rígidos conectados: ecuaciones de movimiento

Un cilindro hueco **C** con una masa **m = 100 kg** y una polea compuesta **P** con un peso **W = 500 N** y un radio de giro $\mathbf{k_R = 0.15\ m}$, se unen por medio de un cable flexible, inextensible y con masa despreciable, tal como se muestra en la figura.



Considerando que el sistema mecánico parte del reposo y que además el cilindro rueda sin deslizar, determine:

a) la magnitud del peso del cuerpo **A** para que en el momento de chocar contra el piso, el centro de masa del cilindro tenga una rapidez de $\mathbf{v_{G,C} = 0.5\ m/s}$;

b) el intervalo de valores que debe tener el coeficiente de fricción μ entre el cilindro y el plano inclinado para que se establezca el rodamiento perfecto; y

c) la magnitud de la reacción total en el pasador **R** que sostiene a la polea compuesta.

Análisis cinemático

$v_{G,C} = 0.5\ \text{m/s};$ $\qquad v_{G,C} = \omega_C\, r_{G/CI}$

$\omega_C = \dfrac{0.5}{0.3};$ $\qquad \omega_C = 1.667\ \text{rad/s}$

$v_X = \omega_C\, r_{X/CI};$ $\qquad v_X = 1.667\ (0.6)$

$v_X = 1\ \text{m/s}$

$v_Y = v_X;$ $\qquad v_Y = 1\ \text{m/s}$

como $v_Y = \omega_P\, r_Y$:

$\omega_P = \dfrac{1.0}{0.1};$ $\qquad \omega_P = 10\ \text{rad/s}$

$v_Z = \omega_P\, r_Z$ $\qquad v_Z = 10\ (0.3)$

$v_Z = 3\ \text{m/s}$

$v_A = v_Z$; $\qquad v_A = 3$ m/s

como el sistema parte del reposo:

$$a_A = \frac{dv_A}{dt};\qquad \int_0^{v_A} dv_A = a_A \int_0^t dt$$

$$v_A = a_A\, t;\qquad \frac{dx_A}{dt} = a_A\, t$$

$$\int_0^1 dx_A = \int_0^{t_1} a_A\, t\, dt;\qquad 1 = \tfrac{1}{2} a_A\, t_1^2 \qquad (1)$$

y para $t = t_1$, $v_A = 3$ m/s, por lo tanto:

$$3 = a_A\, t_1;\qquad t_1 = \frac{3}{a_A} \qquad (2)$$

sustituyendo (2) en (1):

$$1 = \tfrac{1}{2} a_A \left(\frac{3}{a_A}\right)^2 \qquad 2 = \frac{9}{a_A}$$

$$a_A = 4.5 \text{ m/s}^2$$

por lo cual:

$$t_1 = \frac{3}{4.5};\qquad t_1 = 0.6667 \text{ s}$$

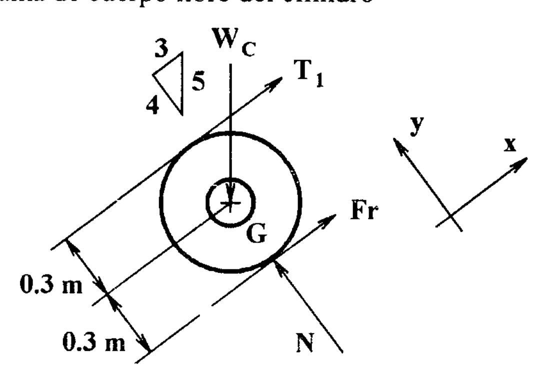
entonces, para el cilindro:

$$a_{G,C} = \frac{dv_{G,C}}{dt};\qquad \int_0^{0.5} dv_{G,C} = \int_0^{0.6667} a_{G,C}\, dt$$

$$0.5 = 0.6667\, a_{G,C}\qquad a_{G,C} = 0.75 \text{ m/s}^2$$

Análisis dinámico

Diagrama de cuerpo libre del cilindro



$$\Sigma F_x:\quad T_1 + Fr - \tfrac{3}{5} W_C = m_C\, a_{G,C}$$

$$\Sigma F_y:\quad N - \tfrac{4}{5} W_C = 0$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_G:\quad 0.3\, T_1 - 0.3\, Fr = I_{GG,C}\, \alpha_C \qquad (3)$$

$$T_1 + Fr - 0.6\,(100)\,(9.8) = 100\,(0.75);\qquad T_1 + Fr = 75 + 588;$$

$$Fr = 663 - T_1 \qquad (4)$$

$N = 0.8\ (100)\ (9.8);$ $N = 784\ \text{N}$

$I_{GG,C} = \frac{1}{2} m_C \left(r_{ext}^2 - r_{int}^2\right);$ $I_{GG,C} = 0.5\ (100)\ (0.3^2 - 0.1^2)$

$I_{GG,C} = 50\ (0.09 - 0.01);$ $I_{GG,C} = 4\ \text{kg·m}^2$

y como $a_{G,C} = \alpha_C\, r_G$:

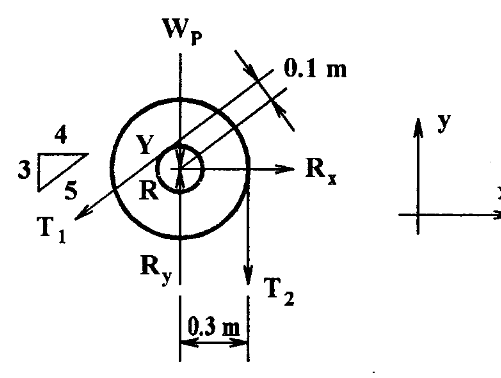
$\alpha_C = \frac{0.75}{0.3};$ $\alpha_C = 2.5\ \text{rad/s}^2$ (5)

sustituyendo (4) y (5) en (3):

$0.3\ T_1 - 0.3\ (663 - T_1) = 4\ (2.5)$ $0.3\ T_1 - 198.8 + 0.3\ T_1 = 10$

$0.6\ T_1 = 208.8;$ $T_1 = 348.2\ \text{N}$ (6)

Diagrama de cuerpo libre de la polea



$\Sigma F_x:\ R_x - \frac{4}{5} T_1 = 0$

$\Sigma F_y:\ R_y - W_P - T_2 - \frac{3}{5} T_1 = 0$

$\circlearrowleft\!+\ \Sigma M_R:\ 0.3\ T_2 - 0.1\ T_1 = I_{GG,P}\ \alpha_P$ (7)

$R_x = 0.8\ (348.2)$ $R_x = 278.5\ \text{N}$

$R_y - 500 - T_2 - 0.6\ (348.2) = 0$ $R_y - T_2 = 708.9$ (8)

como $x_A = \alpha_P\, r_Z$:

$\alpha_P = \frac{4.5}{0.3};$ $\alpha_P = 15\ \text{rad/s}^2$ (9)

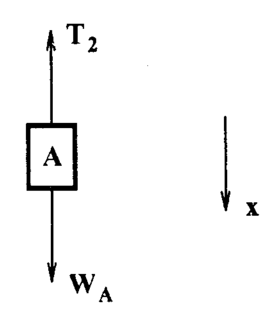
$I_{GG,P} = m_P\, k_R^2$ $I_{GG,P} = \frac{500}{9.8} (0.15)^2$

$I_{GG,P} = 1.148\ \text{kg·m}^2$

sustituyendo (6) y (9) en (7):

$0.3\ T_2 - 0.1\ (348.2) = 1.148\ (15)$ $T_2 = 173.5\ \text{N}$ (10)

Diagrama de cuerpo libre del bloque **A**



$$\Sigma F_x: \quad W_A - T_2 = m_A\, a_A$$

$$W_A - 173.5 = \frac{W_A}{9.8}(4.5)$$

$$W_A - 0.4592\, W_A = 173.5$$

$$\boxed{W_A = 320.7 \text{ N}}$$

sustituyendo (6) en (4):

$$Fr = 663 - 348.2 \qquad Fr = 314.8 \text{ N}$$

y como $Fr < \mu N$:

$$\mu > \frac{Fr}{N}; \qquad \mu > \frac{314.8}{784}$$

$$\boxed{\mu > 0.4016}$$

sustituyendo (10) en (8):

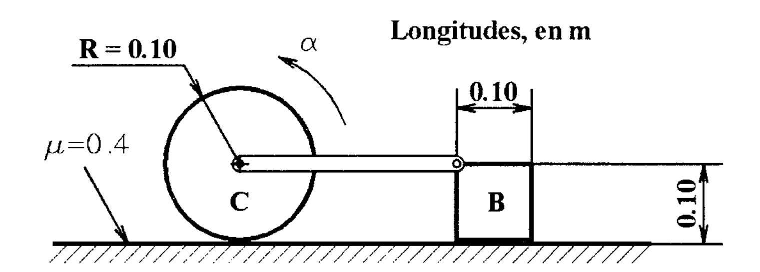
$$R_y - 173.5 = 708.9; \qquad R_y = 882.4 \text{ N}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}; \qquad R = \sqrt{(278.5)^2 + (882.4)^2}$$

$$\boxed{R = 925.3 \text{ N}}$$

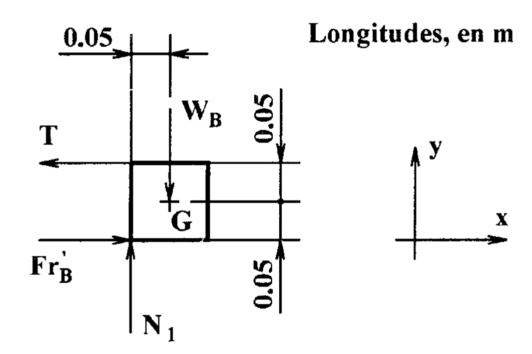
17 Problema de dinámica de cuerpos rígidos conectados: ecuaciones de movimiento

Un cilindro homogéneo **C** con radio r_C **= 0.10 m** y masa m_C **= 10 kg**, está conectado a un bloque **B** también homogéneo y con masa m_B **= 2 kg**, por medio de una barra con masa despreciable, y están colocados sobre un plano horizontal tal como se muestra en la figura, y cuyo coeficiente de fricción con ambos cuerpos es $\mu = 0.4$.



Determine la magnitud de la aceleración angular máxima, $\alpha_{C,máx}$, que puede tener el cilindro para que jale al bloque sin volcarlo, y para dicho valor obtenga la magnitud de la fuerza de fricción **Fr** generada sobre el cilindro así como el par **M** necesario para moverlo.

Diagrama de cuerpo libre del bloque **B**, justo antes del volcarse:



ΣF_x: $\quad Fr'_B - T = m_B\, a_{G,B}$

ΣF_y: $\quad N_1 - W_B = 0$

$(+)\ \Sigma M_G$: $\quad 0.05\,T + 0.05\,Fr'_B - 0.05\,N_1 = 0$

de donde:

$N_1 = 19.6 \text{ N}$

para este caso:

$Fr'_B = \mu\, N_1$; $\qquad Fr'_B = 7.84 \text{ N}$

Entonces, las ecuaciones quedan:

$$7.84 - T = 2\, a_{G,B}$$

$$0.05\,T + 0.05\,(7.84) - 0.05\,(19.6) = 0$$

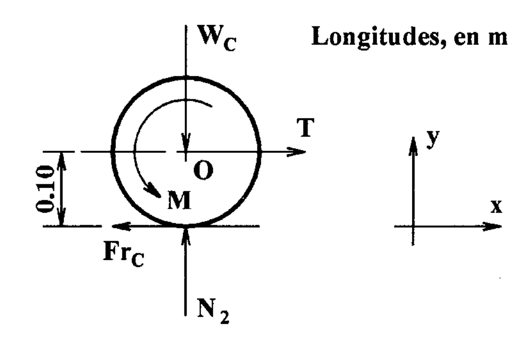
$0.05\,T = 0.98 - 0.392$; $\qquad T = 11.76 \text{ N}$

de donde:

$$7.84 - 11.76 = 2\, a_{G,B}$$

$2\, a_{G,B} = -3.92$; $\qquad a_{G,B} = -1.96 \text{ m/s}^2$

Diagrama de cuerpo libre del cilindro **C**



ΣF_x: $T - Fr_C = m_C \, a_C$

ΣF_y: $N_2 - W_C = 0$

$\circlearrowleft + \, \Sigma M_O$ $M - 0.10 \, Fr_C = I_{OO} \, \alpha_{C,máx}$

$I_{OO} = \frac{1}{2} m_C \, r_C^2$

$I_{OO} = 0.05 \;\; kg{\cdot}m^2$

dado que:

$a_C = a_{G,B}$; $\qquad a_C = 1.96 \;\; m/s^2$

$a_C = \alpha_{C,máx} \, r_C$;

$\boxed{\alpha_{C,máx} = 19.6 \;\; rad/s^2}$

y finalmente:

$Fr_C = 11.76 - 10 \, (-1.96)$;

$\boxed{Fr_C = 31.36 \; N}$

$M = 0.05 \, (19.6) + 0.10 \, (31.36)$

$\boxed{M = 4.116 \;\; N{\cdot}m}$

SERIE VIII

CUERPO RÍGIDO

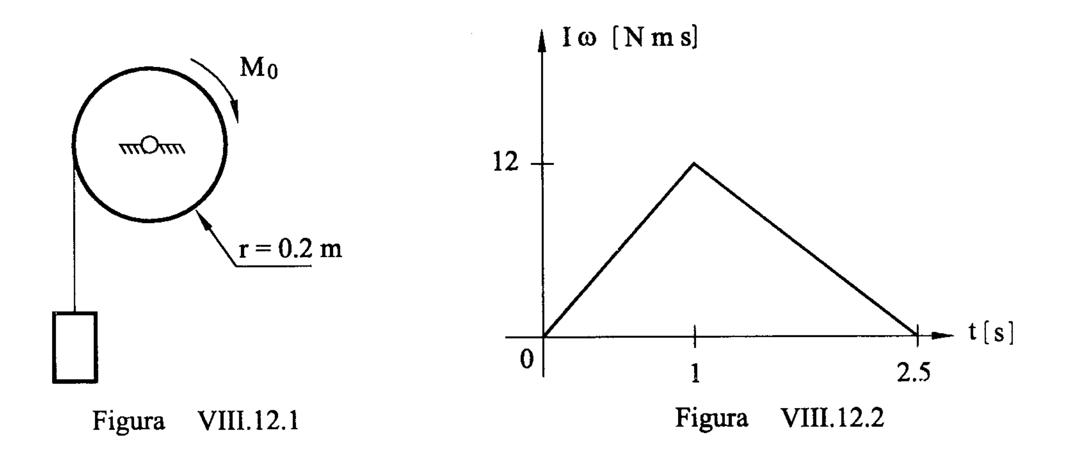


Figura VIII.12.1

Figura VIII.12.2

Trabajo y Energía e Impulso y Cantidad de movimiento

VIII.1.-El bloque de **300 N** de peso se lanza contra un resorte lineal, de **K = 4800 N/m**. Si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es 0.2 y el ancho y la altura del bloque son iguales, determine:

a).-la rapidez máxima a la que puede ser lanzado el bloque para evitar volcamiento, y

b).-la distancia X que el bloque recorre después de chocar contra el resorte y ser rebotado por éste.

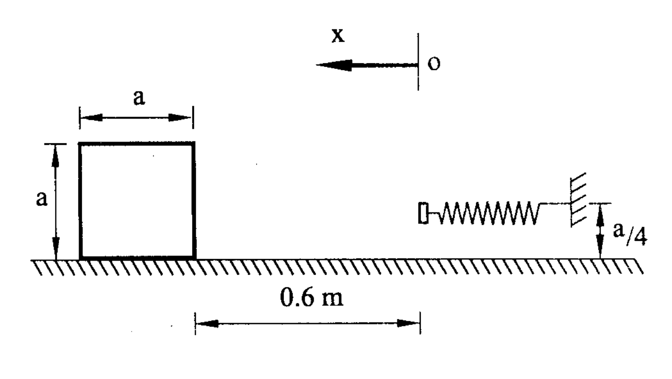


Figura VIII.1

VIII.2.-Un contenedor se lanza con una velocidad horizontal V_0, contra una pared vertical lisa: el contenedor tiene unido rígidamente en la parte delantera un resorte horizontal de constante K a manera de parachoques y a una distancia H de su parte inferior. Despreciando los efectos de fricción y considerando **0<H<b/2,** determine:

a).-la máxima rapidez de lanzamiento, a fin de que, después de chocar no vuelque,

b).-la máxima compresión del resorte, y

c).-la rapidez del contenedor después del choque y cuando el resorte deja de tener contacto con la pared.

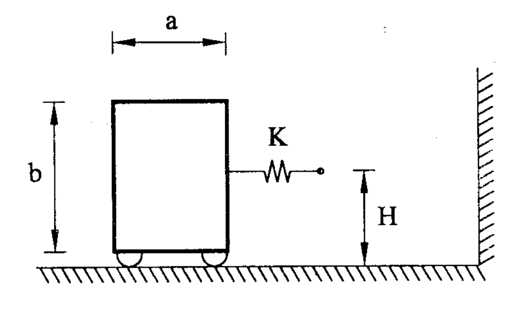


Figura VIII.2

VIII.3.-Un bloque de **100 N** de peso comprime a un resorte de **K = 1000 N/m**, de tal forma que al soltar el sistema, el bloque se desplace una longitud L sin volcar; si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es **0.4**, determine:

a).-la compresión δ que deberá tener el resorte,

b).-la longitud L recorrida por el bloque,

c).-la rapidez del bloque en el momento de dejar de tener contacto con el resorte, y

d).-¿qué sucedería si $\mu = 0.7$?

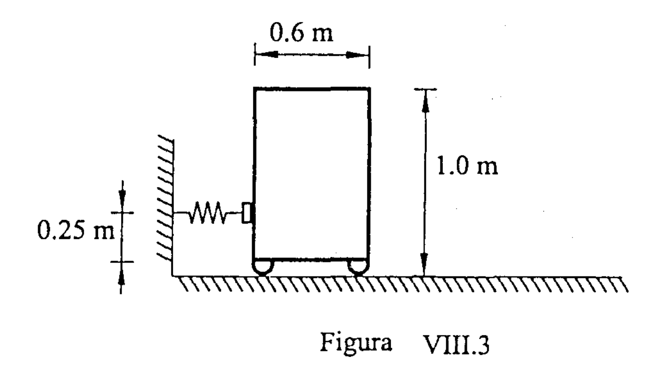


Figura VIII.3

VIII.4.-Un bloque de **60 N** de peso se lanza sobre una superficie horizontal y rugosa, contra un resorte lineal de **K = 500 N/m**, con rapidez inicial de **3.41 m/s** Si μ = **0.5** entre las superficies en contacto, analice si:

a).-el bloque llega o no a tocar al resorte,

b).-el bloque comprime al resorte con una deformación máxima, sin volcarse, y

c).-el bloque comprime al resorte antes de volcarse.

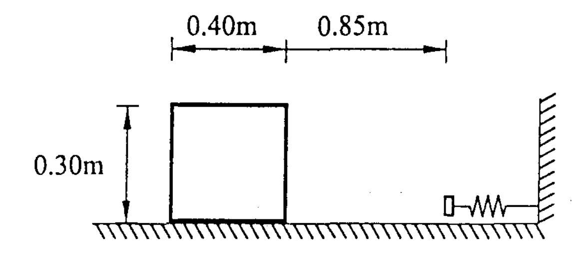


Figura VIII.4

VIII.5.-El sistema mecánico que se muestra en la figura parte del reposo, estando el resorte en su longitud natural. Después de soltar al cuerpo **A**, se observa que su descenso máximo corresponde a la longitud natural del resorte, es decir ln. Si se considera que la polea doble de peso **Wp** tiene un radio de giro **kc**, respecto a su eje de rotación, exprese la rapidez del bloque A en función de parámetros conocidos y de su recorrido $\mathbf{S_A}$.

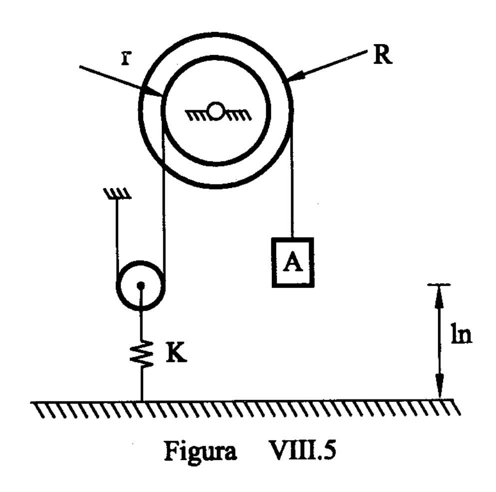


Figura VIII.5

VIII.6.-La barra delgada de **30 N** de peso que se muestra en la figura, se encuentra apoyada en dos paredes lisas, una vertical y la otra horizontal. Cuando está en reposo, se somete a la acción de una fuerza P, que provoca que el extremo A sea desplazado horizontalmente **0.10 m**. Determine la rapidez angular de la barra para:

a).-P = 30 N

b).-P = 20 N

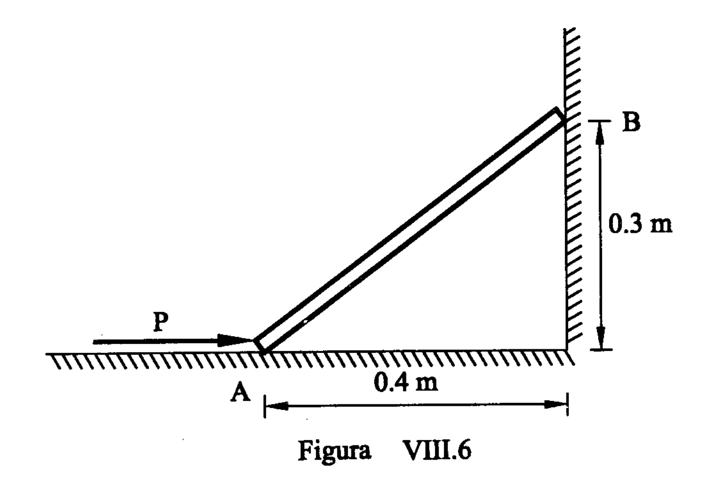


Figura VIII.6

VIII.7.-Una esfera de **W = 150 N** y **10 cm** de radio, comprime a un resorte lineal de **k = 4950 N/m**. Si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto vale **0.8,** se desprecia el efecto de la fricción entre el vástago del resorte y la esfera, y se pretende que la esfera ruede sin deslizar hacia arriba, determine:

a).-la deformación máxima del resorte,

b).-el número de vueltas que alcanza a girar la esfera, y

c).-la rapidez del centro de masa de la esfera, al dejar de tener contacto con el resorte.

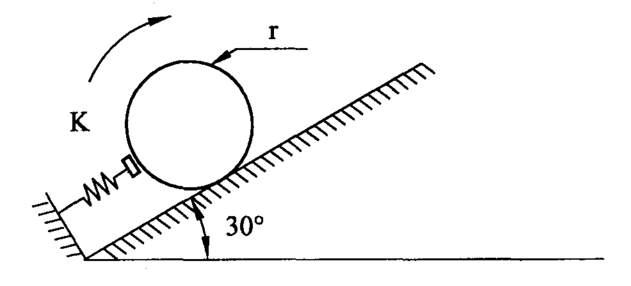


Figura VIII.7

VIII.8.-El sistema mostrado está formado por un bloque y un cilindro de igual peso, unidos mediante dos cuerdas flexibles, inextensibles y de masa despreciable, que pasan por pequeñas poleas lisas. Si el sistema se suelta desde el reposo, el cilindro rueda sin deslizar y el bloque recorre **0.80 m** cuando la energía cinética del cilindro vale **19.2 [J],** determine:

a).-el peso del cilindro, y

b).-la rapidez de su centro de masa.

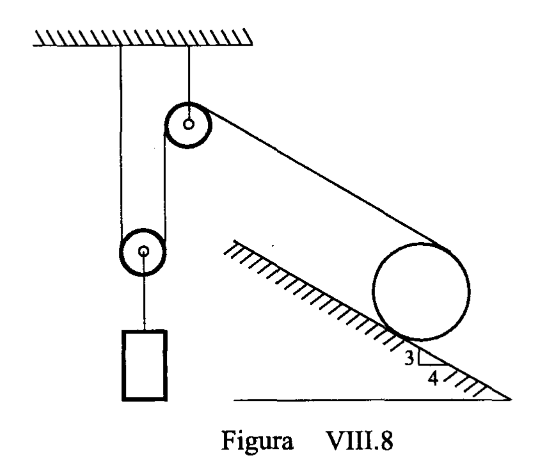


Figura VIII.8

VIII.9.-Un cilindro hueco de **20 kg** y **0.10 m** de espesor, se suelta desde el reposo, rueda sin deslizar y después de que su centro de masa recorre **2 m** y gira **10 rad**, su energía cinética total vale **192.2 J**. Para estas condiciones, obtenga:

a).-su momento de inercia Ic, respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento y que pase por su centro de masa, y

b).-la fuerza de fricción entre las superficies en contacto.

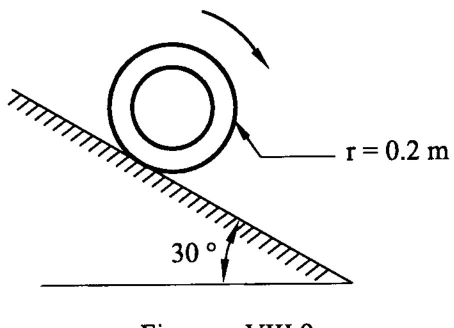


Figura VIII.9

VIII.10.-El sistema mecánico está formado por una polea doble de **200 N** de peso y radio de giro **kc = 0.16 m**, respecto a su eje de rotación y dos bloques A de **100 N** de peso y B. Si sistema se suelta desde el reposo y el coeficiente de fricción entre el plano y B es **0.2**, determine el peso de B, que provocará que el bloque A adquiera una rapidez de **0.6 m/s** cuando el bloque B ha recorrido **1 m** sobre el plano inclinado.

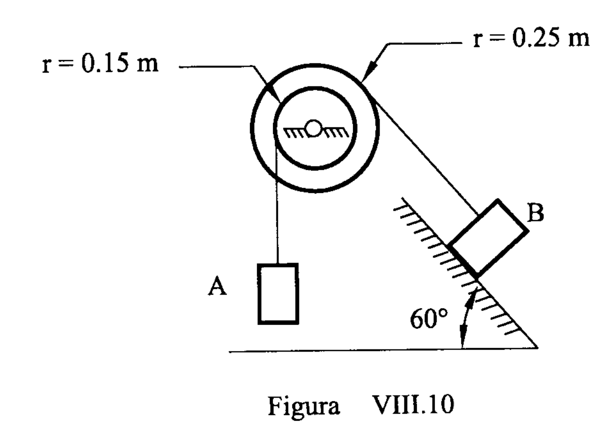


Figura VIII.10

VIII.11.-Se sueltan desde el reposo y en el mismo instante, un anillo y un cilindro, sobre dos rampas de diferente inclinación, de tal forma que sus centros de masa tienen la misma altura **h**. Tanto el anillo como el cilindro tienen igual masa y radio y se considera que ruedan sin deslizar. Determine:

a).-la rapidez de los centro de masa de cada uno de los cuerpos al descender una altura **h,**

b).-la energía cinética total de cada uno de los cuerpos, correspondiente a dicha posición, y

c).-la relación entre los ángulos α **y** β, para que ambos cuerpos pasen por la horizontal LL' en el mismo instante.

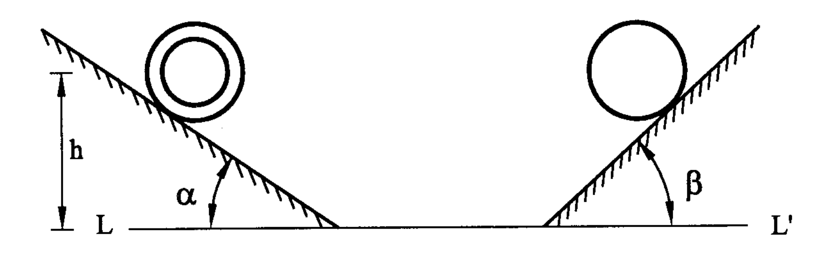


Figura VIII.11

VIII.12.-El sistema está formado por una polea fija de **100 N** de peso y cuyo momento de inercia respecto a su eje de rotación es **Io** = **0.204** kgm^2 y un bloque de **200** N de peso, unidos por una cuerda flexible inextensible y de masa despreciable. La polea está sujeta a la acción de un par constante Mo durante el intervalo **[0,1] s**, y el comportamiento de la magnitud de su cantidad de movimiento angular se muestra en el gráfico adjunto. A partir de estos datos, determine:

a).-la magnitud del par Mo,

b).-la rapidez del bloque en t = 2 s, y

c).-la magnitud de la tensión en la cuerda en t=2 s.

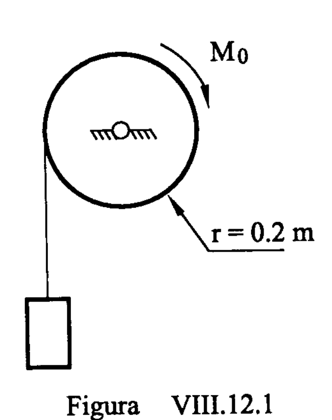


Figura VIII.12.1

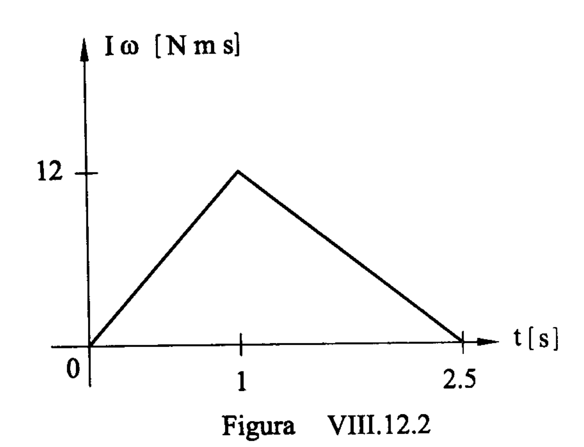


Figura VIII.12.2

VIII.13.-Un cilindro de pared delgada, de **200 N** de peso se somete a la acción de un par **M,** cuyo comportamiento respecto al tiempo, se muestra en el gráfico adjunto. Si el cilindro rueda sin deslizar y parte del reposo, en **t= 0 s,** determine:

a).-la rapidez en **t** = **4 [s]**, y

b).-la máxima rapidez del cilindro y el tiempo en el que ocurre.

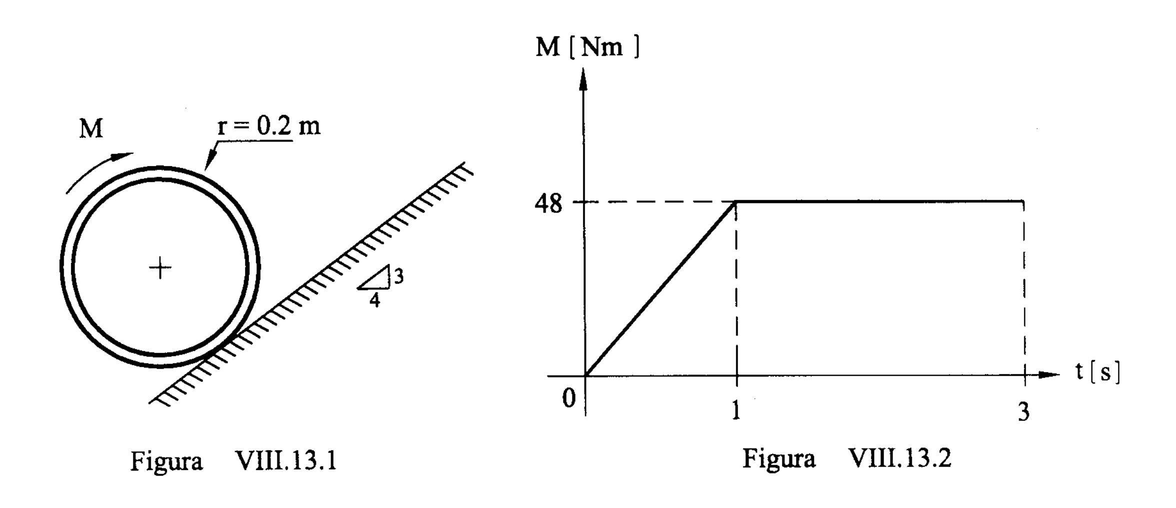


Figura VIII.13.1

Figura VIII.13.2

VIII.14.-El sistema mecánico de la figura parte del reposo en t=0 s; en el intervalo [0,3] s el impulso lineal total en el cilindro, que rueda sin deslizar en el plano inclinado, vale 27.5 N s. Si $\mathbf{W_A = W_B = W_C = 50\ N}$ y el radio de giro de la polea doble respecto a su eje de rotación es $\mathbf{k = 10.6}$ cm, determine:

a).-la cantidad de movimiento del bloque C en t= 3 s.,

b).-el impulso total en el intervalo [0,3] s, para la polea compuesta, y

c).-el impulso de la tensión en el cable que sostiene al bloque.

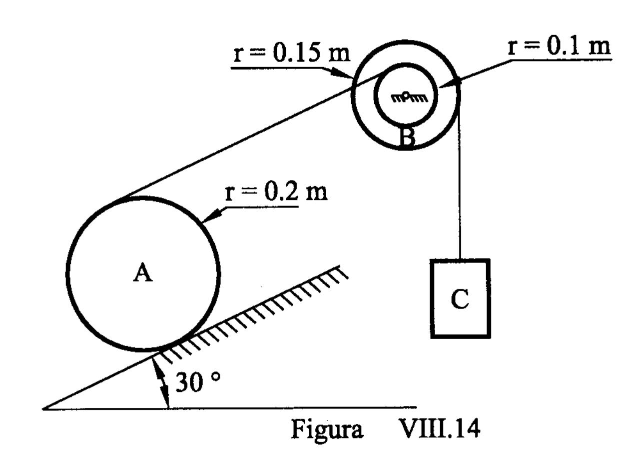
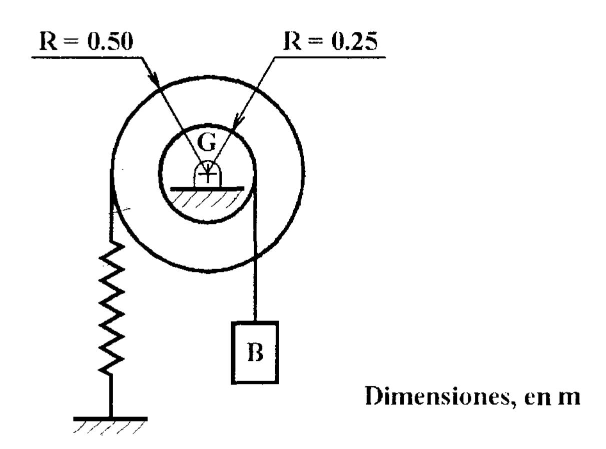


Figura VIII.14

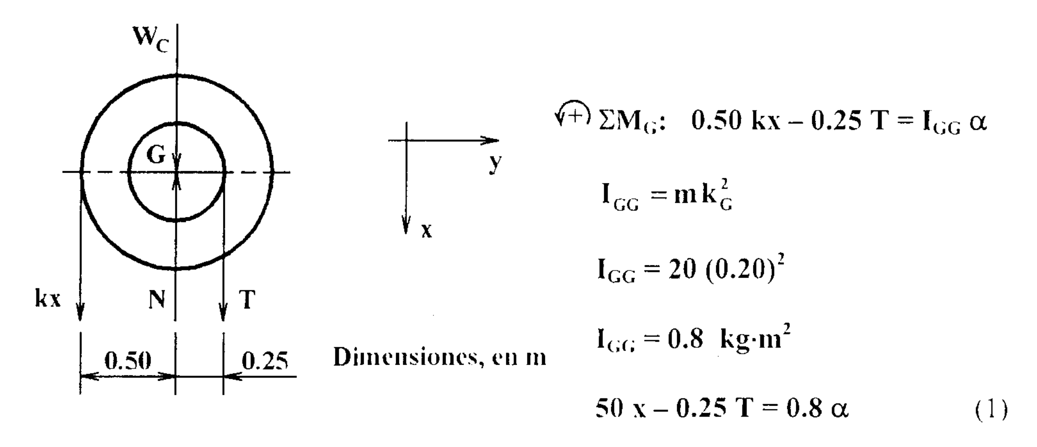
18 Problema de dinámica de cuerpos rígidos conectados: ecuaciones de movimiento y método de trabajo y energía

Un carrete y una masa $\mathbf{m_C = 20\ kg}$ y un radio de giro $\mathbf{k_G = 0.20\ m}$, tiene su centro de rotación en **G**. En su cilindro exterior tiene enrollada una cuerda elástica con masa despreciable, que puede modelarse como un resorte con una constante de rigidez $\mathbf{k = 100\ \ N/m}$; en su cilindro interior tiene enrollada una cuerda inextensible y también con masa despreciable, de la que cuelga un bloque **B** con una masa $\mathbf{m_B = 10\ kg}$.



Si el sistema parte del reposo en la posición mostrada en la figura, para la cual la cuerda elástica comienza a tensarse, es decir, el resorte que lo modela parte de su posición natural de equilibrio. determine la distancia que recorre el bloque **B** hasta que se detiene por primera vez. Suponga que la fricción es despreciable.

Diagrama de cuerpo libre del carrete



$$\circlearrowleft + \ \Sigma M_G: \quad 0.50\ kx - 0.25\ T = I_{GG}\ \alpha$$

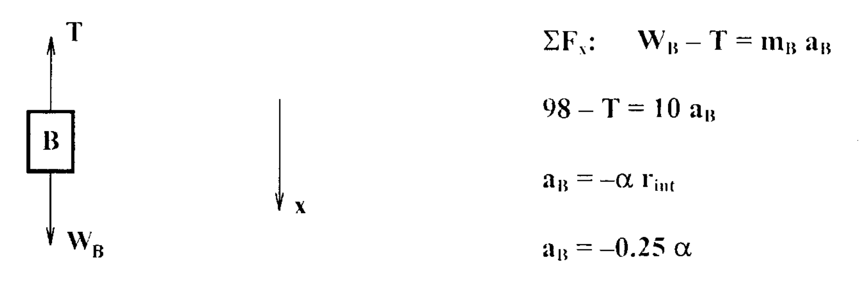
$$I_{GG} = m\,k_G^2$$

$$I_{GG} = 20\ (0.20)^2$$

$$I_{GG} = 0.8\ \ kg{\cdot}m^2$$

$$50\ x - 0.25\ T = 0.8\ \alpha \qquad (1)$$

Diagrama de cuerpo libre del bloque **B**



$$\Sigma F_x: \quad W_B - T = m_B\ a_B$$

$$98 - T = 10\ a_B$$

$$a_B = -\alpha\ r_{int}$$

$$a_B = -0.25\ \alpha$$

por tanto:

$$\mathbf{T = 98 - 10\,(-0.25\,\alpha)} \qquad (2)$$

Se establece la variable $\mathbf{x}$ como la longitud de arco que se mueve la parte exterior del carrete:

$$\mathbf{x = -0.5\,\theta} \qquad (3)$$

sustituyendo (2) y (3) en (1):

$$\mathbf{50\,(-0.5\,\theta) - 0.25\,(98 + 2.5\,\alpha) = 0.8\,\alpha} \qquad \mathbf{-25\,\theta - 24.5 - 0.625\,\alpha = 0.8\,\alpha}$$

y dado que:

$$\alpha = \omega\frac{\mathbf{d\omega}}{\mathbf{d\theta}}; \qquad \mathbf{(-25\,\theta - 24.5)\,d\theta = 1.425\,\omega\,d\omega}$$

$$\int_0^{\theta_f}(-25\theta - 24.5)\,d\theta = \int_0^0 1.425\,\omega\,d\omega; \qquad -12.5\theta_f^2 - 24.5\theta_f = 0$$

$$\mathbf{-12.5\,\theta_f = 24.5}; \qquad \mathbf{\theta_f = -1.96\ \ rad}$$

por lo tanto:

$$\mathbf{x_B = -0.25\,\theta_f}$$

$$\boxed{\mathbf{x_B = 0.49\ \ m}}$$

Aplicando el método de trabajo y energía:

$$\mathbf{T_1 + V_1 = T_2 + V_2}$$

Las energías cinéticas inicial y final son nulas, por lo tanto:

$$\mathbf{V_1 = V_2}$$

Considerando que para el resorte $\mathbf{x_{k,1} = 0\ \ m}$, $\mathbf{x_{B,2} = 0\ \ m}$:

$$\tfrac{1}{2}\,k\,x_{k,1}^2 + W_B\,x_{B,1} = \tfrac{1}{2}\,k\,x_{k,2}^2 + W_B\,x_{B,2}; \qquad 0 + 98\,x_{B,1} = \tfrac{1}{2}(100)\,x_{k,2}^2 + 0$$

y dado que $\mathbf{x_k = 2\,x_B}$:

$$\mathbf{98\,x_B = 50\,(2\,x_B)^2}; \qquad \mathbf{98 = 200\,x_B}$$

$$\boxed{\mathbf{x_B = 0.49\ \ m}}$$

19 Problema de dinámica de cuerpo rígido: método de trabajo y energía

Un cilindro de **100 N** de peso, inicialmente en reposo, está conectado a un resorte de **K = 2000 N/m** mediante un sistema que consta de una cuerda y dos poleas (una fija y otra móvil). Si se suelta en la posición mostrada, cuando el resorte tiene su longitud natural y rueda sin deslizar, determine:

a).-la máxima deformación $\delta_{máx}$ que experimenta el resorte, y

b).-la rapidez del centro de masa del cilindro cuando ha recorrido $\delta_{máx}/2$, a partir de donde inició su movimiento.

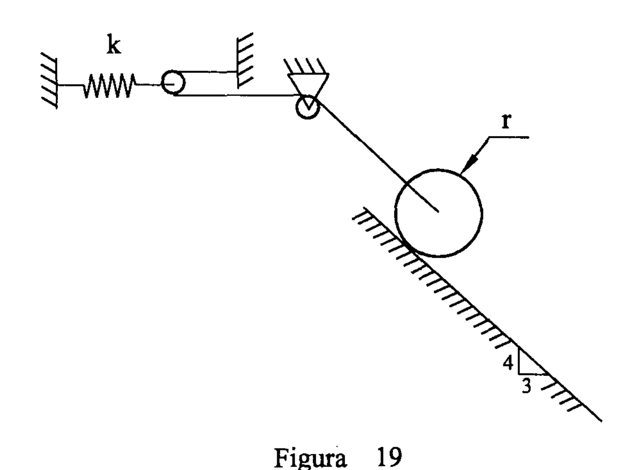
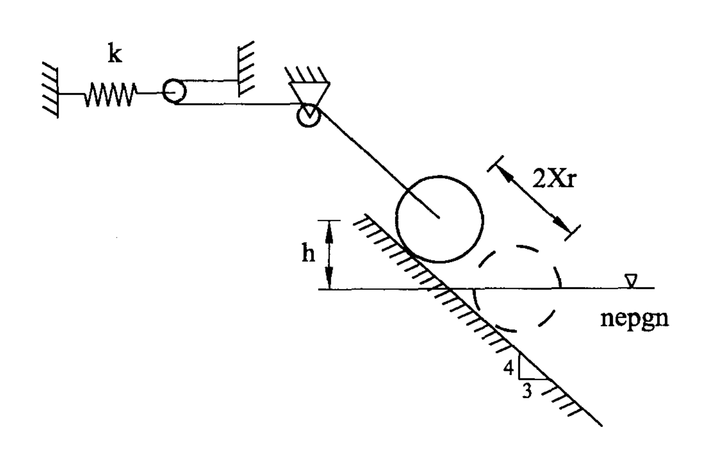


Figura 19

Resolución

Dado que en rodamiento sin deslizamiento, el trabajo realizado por la fuerza de fricción es nulo, y el trabajo realizado por la cuerda también se anula, se puede plantear al sistema como si **"fuera"** un sistema conservativo.



Si Xc = desplazamiento del centro de masa del cilindro, y de las relaciones cinemáticas:

δ **= Xc /2**

sen β **= 4/5 = h / 2**δ **, h = 1.6**δ

Expresiones matemáticas a utilizar:

$EC = 0.5mr^2 + \omega^2 I_c/2$

$Epg = Wh$

$Epe = 0.5kx^2$

Posición (1)

$EC = 0$

$Epg = 100\ (1.6\delta\ )$

$Epe = 0$

Posición (2)

$EC = (100/\ 9.81\ V_c^2)/2 + (\ V_c/r\ )^2/2\ [100\ r^2\ /\ 9.81\ ]\ /2$

$EC = V_c^2\ (\ 5.0968 + 2.5484\ ) = 7.6452\ V_c^2$

$Epg = 0$

$Epe = 2000\ \delta^2\ /2 = 1000\ \delta^2$

$\Sigma\ E_{(1)} = \Sigma\ E_{(2)}$

$100\ (1.6\delta\ ) = 7.6452\ V_c^2 + 1000\ \delta^2$ **..............(1)**

la deformación del resorte será máxima cuando Vc = 0, $\delta_{máx}$**, para** $V_c = 0$**,**

$160 = 1000\ \delta_{máx}$ **,**

a).- $\delta_{máx} = 0.16$ **m**

para δ **= 0.08 m, en (1)**

$160\ (\ 0.08\ ) = 7.6452\ V_c^2 + 1000\ (\ 0.08\ )^2$

b).- $Vc = 0.9149$ **m/s**

20 Problema de dinámica de cuerpo rígido: ecuaciones de movimiento y método de trabajo y energía

El disco mostrado se lanza hacia arriba del plano inclinado mostrado. Sabiendo que el disco es homogéneo, rueda sin deslizar y que justamente alcanza a llegar al final del plano inclinado, determine:

a).-la rapidez angular inicial ω_0 con la que fue lanzado, y

b).-el mínimo coeficiente de fricción para que esto ocurra.

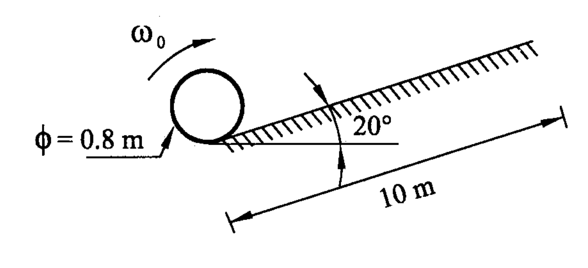


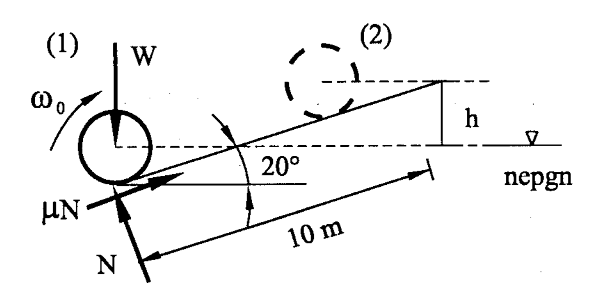
Figura 20

Resolución

Dado que en rodamiento sin deslizamiento, el trabajo realizado por la fuerza de fricción es nulo, se puede plantear al sistema como si **"fuera"** un sistema conservativo.

D.C.L.

D.C.L.



Expresiones matemáticas a utilizar:

$$\mathbf{EC = 0.5mr^2 + \omega^2 I_c/2}$$

$$\mathbf{Epg = Wh}$$

$$\Sigma \mathbf{M_{cir} = I_{cir}}\, \alpha$$

Sen 20° = h/10, **h = 3.4202 m**

Posición (1) **Posición (2)**

$$EC = m(0.4\ \omega_o)^2/2 + ½(\omega_o^{\ 2})\ m\ (0.4)^2/2$$

$EC = 0.12\ m\ \omega_o^{\ 2}$ $EC = 0$

$Epg = 0$ $Epg = 3.4202\ mg$

$$\Sigma\ E_{(1)} = \Sigma\ E_{(2)}$$

$$0.12\ m\ \omega_o^{\ 2} = 3.4202\ mg$$

a).- ω_o **= 16.7213 rad/s , en sentido horario.**

$$\Sigma\ M_{cir} = I_{cir}\ \alpha$$

$$m\ (9.81)\ sen\ 20° (0.4) = [\ m\ (0.4^2)/2 + m\ (0.4^2)]\ \alpha$$

$$\alpha = 5.5921\ rad/s^2$$

$a_c = \alpha\ r$ $a_c = 2.2368\ m/s^2$ **, paralela al plano inclinado y dirigida hacia abajo.**

$\Sigma\ Fy = 0,$ $N = m\ g\ cos\ 20°$, $N = 9.2184\ m\ g$

$$\Sigma\ Fx = m\ a_c$$

$$-\ m\ 9.81\ sen\ 20° + 9.2184\ m\ \mu = m\ (-2.2368)$$

$$\mu = (-2.2368 + 3.3552) / 9.2184$$

b).- $\mu = 0.12$

21 Problema de dinámica de cuerpo rígido: método de trabajo y energía

El sistema que se muestra, inicialmente en reposo, está constituido por una polea compuesta de **40 N,** cuyo radio de giro respecto a un eje centroidal y perpendicular al plano de movimiento es $\mathbf{k_c}$ **= 0.1061 m**, un bloque de peso W_A y un resorte lineal de **K = 192 N/m**, inicialmente sin deformar; todos estos elementos están conectados mediante cuerdas ideales. Cuando el sistema inicia su movimiento, la polea rueda sin deslizar y el bloque A se en encuentra a una altura h = 0.30 m del piso. Obtenga:

a).-el valor de W_A para que, al descender h, toque ligeramente el piso, y

b).-trace la gráfica de la rapidez de A en función de su posición.

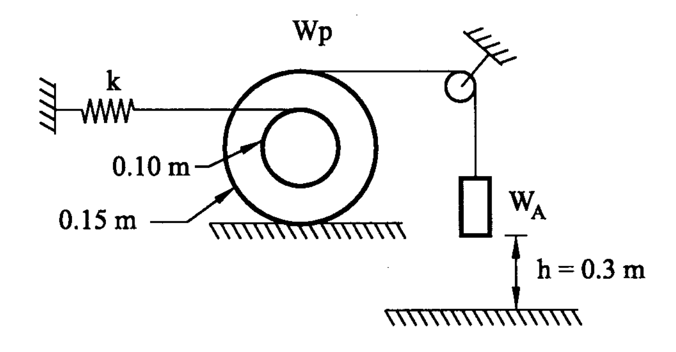


Figura 21

Resolución

Expresiones matemáticas a utilizar:

$$U_{tot} = \Delta EC$$

$$\Delta EC = \Delta EC_{tras} + \Delta EC_{rot}$$

$$\Delta EC_{tras} = \Delta EC_A + \Delta EC_{cp} \qquad \Delta EC_{rot} = \Delta EC_p$$

$$\Delta EC_{tras} = W_p V^2_c/2g + W_A V^2_A/2g$$

$$\Delta EC_{rot} = \omega^2 I_c/2$$

Fuerzas que realizan trabajo: fuerza del resorte y el peso W_A.

Fuerzas que no realizan trabajo: T, N y fr

$$\mathbf{U_{tot} = W_A\, h + (-\, 0.5kx^2\,)}$$

$$\mathbf{S = r\,\theta}$$

$$\mathbf{V = \omega\, r}$$

$$\mathbf{S_A = S_a = 0.3\ m}$$

$$\mathbf{S = r\,\theta \qquad \theta = S_A / 2\,(\,0.15\,) = 0.3 / 2\,(\,0.15\,)}$$

$$\mathbf{S_b = \delta = (\,0.1 + 0.15\,)\,0.3 / 2\,(\,0.15\,) = 0.25\ m}$$

$$\mathbf{V = \omega\, r \qquad V_A = V_a \qquad \omega_p = V_A / 0.15\ (2)}$$

$$\mathbf{U_{tot} = 0.3\, W_A - 0.5\,(\,192\,)\,(\,0.25\,)^2 = 0.3\, W_A - 6\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\,1\,)}$$

Dado que el sistema está inicialmente en reposo, y que al descender el bloque A una altura h = 0.3 m, se pretende que éste toque ligeramente el piso; es decir, el fenómeno empieza desde el reposo, aumenta su velocidad y luego la disminuye hasta "casi" detenerse, por lo tanto puede considerarse que Δ EC = 0

De. ... (1) $\qquad$ $\mathbf{0.3\, W_A - 6 = 0}$

$$\mathbf{W_A = 20\ N}$$

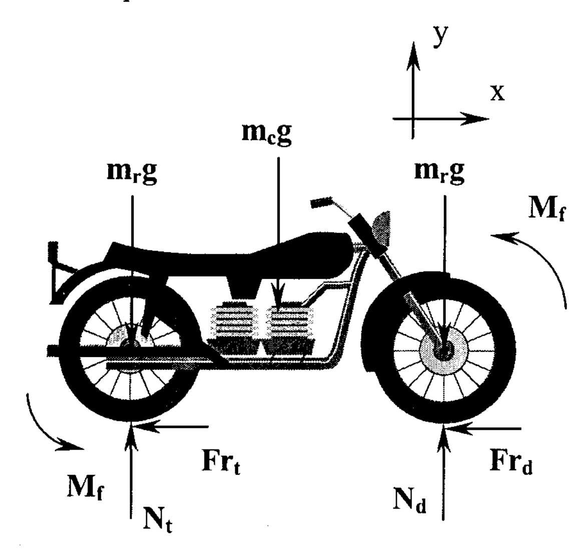
22 Problema de dinámica del cuerpo rígido: método de trabajo y energía

Una motocicleta se mueve en línea recta sobre un plano horizontal con una rapidez $\mathbf{v = 54\ kph}$ en el instante en que se le aplica el freno. Si cada rueda tiene una masa $\mathbf{m_r = 10\ kg}$, un radio $\mathbf{R_r = 0.33\ m}$ y un radio de giro $\mathbf{k_G = 0.28\ m}$, el cuerpo de la motocicleta, incluyendo al conductor, una masa $\mathbf{m_C = 150\ kg}$, y se considera que las ruedas no resbalan, determine:

a) la rapidez angular de las ruedas antes de aplicar los frenos; y

b) el par de freno constante, $\mathbf{M_f}$, que se requiere aplicar a cada una de las ruedas, para que la motocicleta se detenga en $\mathbf{x_f = 100\ m}$.

Diagrama de cuerpo libre



a) dado que $\mathbf{v = \omega R}$:

$$v_0 = 54\frac{km}{h}\times\frac{1\ h}{3600\ s}\times\frac{1000\ m}{1\ km} \qquad v_0 = 15\frac{m}{s}$$

$$v_0 = -\omega_r R_r \qquad \omega_r = -\frac{v_0}{R_r}$$

$$\omega_r = -\frac{15}{0.33}$$

$$\boxed{\omega_r = -45.45\ \text{rad/s}}$$

el signo negativo se debe a que la rapidez angular es en sentido horario.

b) la energía cinética inicial total es la suma de las energías cinéticas del cuerpo de la motocicleta y de las ruedas:

$$T_{tot,0} = \tfrac{1}{2}m_c v_0^2 + 2\left(\tfrac{1}{2}m_r v_0^2 + \tfrac{1}{2}I_{GG}\omega_r^2\right)$$

$$T_{tot,0} = \tfrac{1}{2}(150)(15)^2 + 2\left[\tfrac{1}{2}(10)(15)^2 + \tfrac{1}{2}(10)(28)^2(45.45)^2\right]$$

$$T_{tot,0} = 16{,}875 + 1{,}620 + 2{,}250$$

$$\boxed{T_{tot,0} = 20{,}745 \ \ J}$$

Como $v_1 = 0$ m/s, $T_{tot,1} = 0$ J:

Dado que el trabajo que desarrollan las normales (**N_d** y **N_t**), los pesos (**m_cg** y **m_rg**), así como de las fuerzas de fricción (**Fr_d y Fr_t**) es nulo, el trabajo que desarrollan todas las fuerzas que inciden sobre la motocicleta y las ruedas depende únicamente de los pares de freno **M_f**:

$$U_{0-1} = 2M_f\Delta\theta$$

donde:

$$\Delta\theta = -\frac{100}{0.33}; \qquad \Delta\theta = -303.0\,[rad]$$

y como:

$$U_{0-1} = T_{tot,1} - T_{tot,0}$$

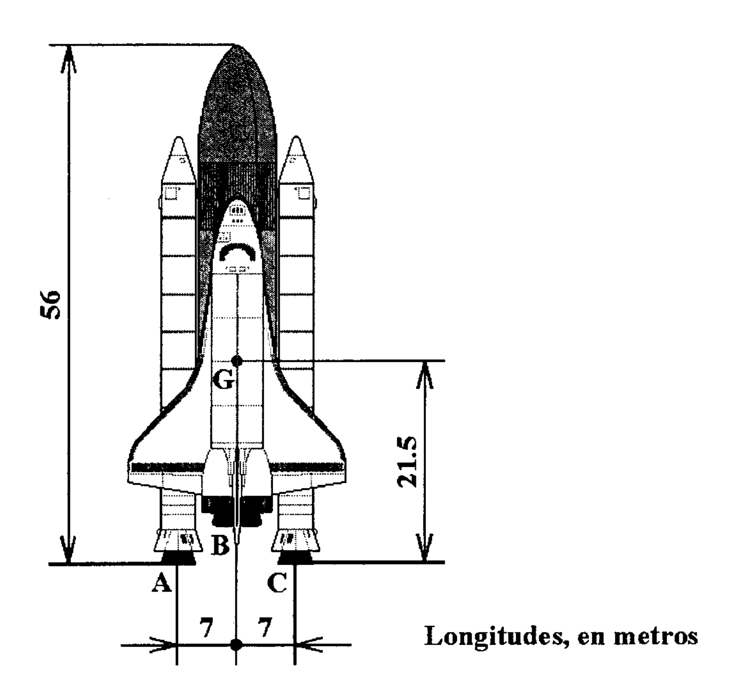
por tanto:

$$2M_f(-303.0) = 0 - 20{,}745 \qquad M_f = \frac{-20{,}745}{2(-303.0)}$$

$$\boxed{M_f = 34.24 \ \ N{\cdot}m}$$

23 Problema de dinámica del cuerpo rígido: método de impulso y cantidad de movimiento

El 28 de enero de 1986, a las 11:38 h AM, ocurrió el trágico accidente del transbordador espacial "Challenger", en Cabo Cañaveral, Florida. El conjunto para despegue de dicho transbordador tiene una masa total **m = 2'040,000 kg**, y sus dimensiones aproximadas se muestran en la figura, en la que **G** representa la posición de su centro de masa, así como **A**, **B** y **C** los puntos de aplicación teóricos de las fuerzas impulsoras de los motores, cuyas líneas de acción son paralelas a su eje y que tienen una magnitud aproximada de $\mathbf{F_A}$ **= 14,700 kN**, $\mathbf{F_B}$ **= 5,000 kN** y $\mathbf{F_C}$ **= 14,700 kN**, respectivamente, durante los dos primeros minutos del despegue.



Longitudes, en metros

Se sabe que a los **59 s** después del despegue, una turbulencia atmosférica y la baja temperatura ambiental ocasionaron el desprendimiento de algunas partes del motor derecho (**C**), que redujo su fuerza impulsora, lo que provocó esfuerzos extraordinarios en la estructura del cohete, causando una fuga de combustible que ocasionó a los **73 s** la explosión de la nave, matando a sus siete tripulantes.

Si se supone que la masa se mantiene constante todo el tiempo, que debido a la falla citada la fuerza impulsora del motor mencionado se redujo a $\mathbf{F_C}$ **= 13,000 kN**, y se considera la fuerza de fricción viscosa del aire constante, con magnitud de $\mathbf{F_v}$ **= 2,500 kN**, determine:

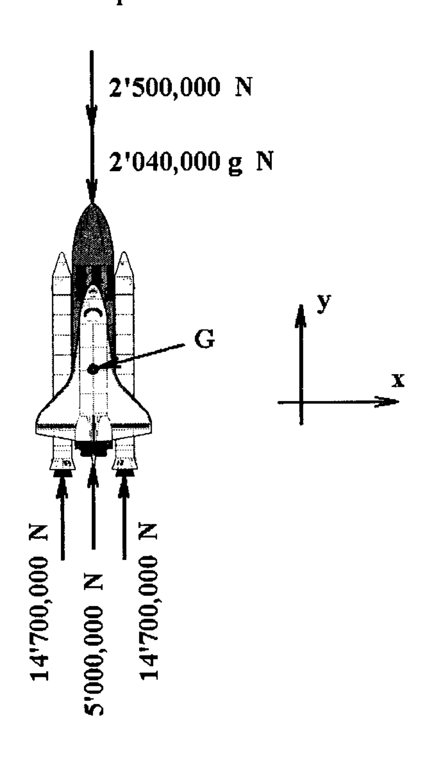
a) la rapidez lineal, en el instante en que ocurrió la falla; y

b) la rapidez angular en el momento en que explotó el transbordador.

Obtenga un valor aproximado del momento de inercia centroidal, considerando que el conjunto del transbordador se comporta como una barra homogénea y delgada.

a) Para el intervalo de tiempo de $0 \leq t \leq 59$ s:

diagrama de cuerpo libre



$$\Sigma F_y = 2\ (14'700{,}000) + 5'000{,}000 - 2'500{,}000 - (2'040{,}000)\ (9.8)$$

$$\Sigma F_y = 11'908{,}000 \text{ N}$$

$$I_y = mv_{y,1} - mv_{y,0}$$

$$\int_0^{59} 11'908{,}000\, dt = mv_{y,1} - mv_{y,0}$$

y dado que $mv_{y,0} = 0$ m/s:

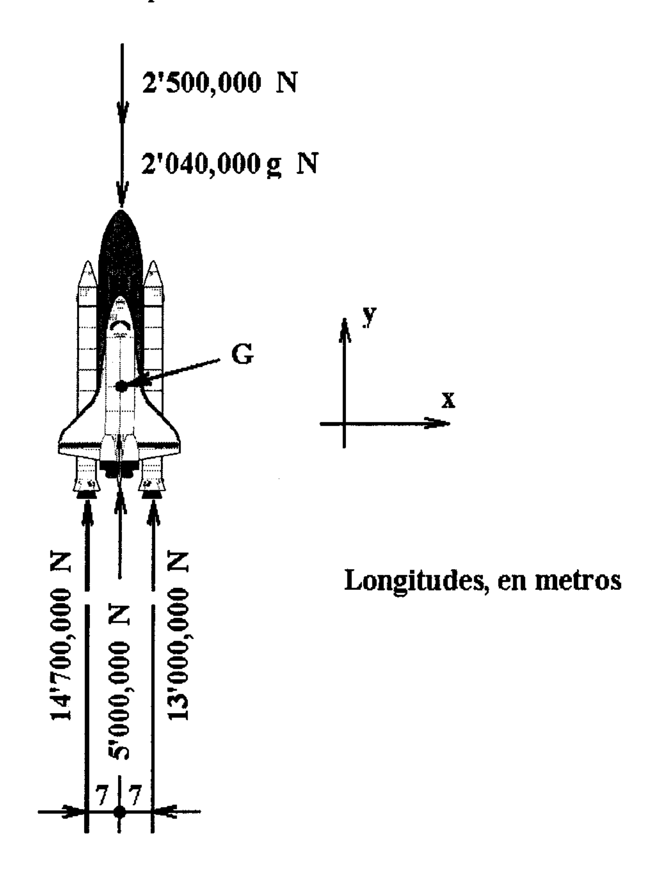
$$(11'908{,}000)\ (59) = 2'040{,}000\ v_{y,1}$$

y por tanto:

$$\boxed{v_{y,1} = 344.4 \text{ m/s}}$$

b) Para el intervalo de tiempo de **59 < t ≤ 73 s**:

diagrama de cuerpo libre



Longitudes, en metros

$$\circlearrowleft + \quad \Sigma M_G = -(14'700{,}000)(7) + (13'000{,}000)(7)$$

el momento de inercia, I_G, se puede calcular como:

$$I_G = \tfrac{1}{12} m l^2 ; \qquad I_G = \tfrac{1}{12}(2'040{,}000)(56)^2$$

$$I_G = 533'120{,}000 \ \text{kg·m}^2$$

y dado que $\omega_0 = 0$ **rad/s**:

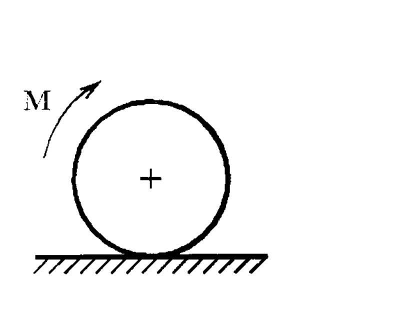
$$\int_{59}^{73} (-11'900{,}000)\,dt = I_G\,\omega_1 - I_G\,\omega_0 ; \qquad (-11'900{,}000)(73-59) = 533'120{,}000\ \omega_1$$

por consiguiente:

$$\omega_1 = \frac{-166'600{,}000}{533'120{,}000} \qquad \boxed{\omega_1 = -0.3125 \ \text{rad/s}}$$

El signo negativo indica que el transbordador giró en sentido horario, en torno a su centro de masa, en el intervalo de tiempo de **59< t ≤73 s**.

Una polea cilíndrica con peso **W** y radio **R**, inicialmente en reposo, se somete a la acción de un par **M**; la polea puede moverse libremente con rodamiento perfecto a lo largo de un plano horizontal. Si se desea que la velocidad del centro de masa sea la misma para **t = 4 s** para las dos configuraciones de pares mostrados al actuar, de manera separada y en igualdad de circunstancias sobre la misma polea ¿cuál debe ser la proporción de las magnitudes T_1 y T_2?



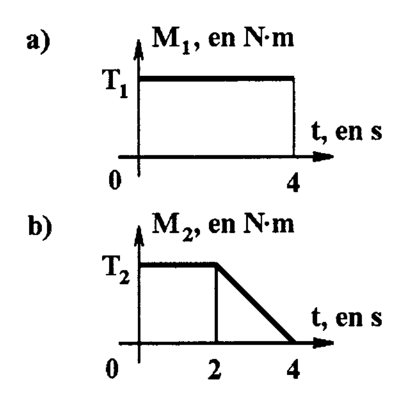
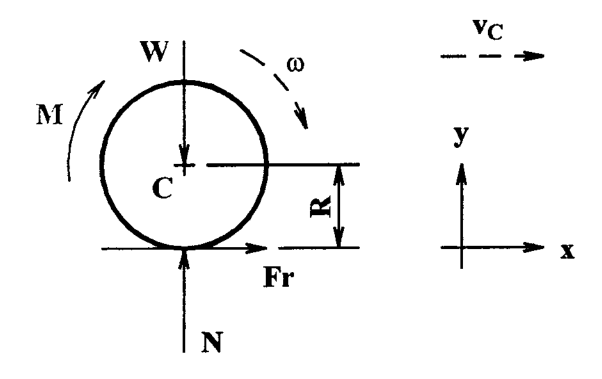


Diagrama de cuerpo libre



Ecuaciones de movimiento

Traslación:

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_x \, dt = m(v_2 - v_1)$$

$$\int_0^4 Fr \, dt = \frac{W}{g}(v_4 - 0) \tag{1}$$

v_4 es la rapidez del centro de masa de la polea en **t = 4 s**

Rotación:

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma M \, dt = I_{CC}(\omega_2 - \omega_1)$$

$$\int_0^4 [M - Fr(R)] dt = \frac{1}{2}\frac{W}{g} R^2 [\omega_4 - 0] \tag{2}$$

ω_4 es la rapidez angular de la polea en $\mathbf{t = 4\ s}$.

Al dividir (2) entre $\mathbf{R}$ y tomando en cuenta que, de las relaciones cinemáticas se tiene que $\mathbf{v_c = \omega\, R}$:

$$\int_0^4 \left[\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{R}} - \mathbf{Fr}\right] \mathbf{dt} = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{W}}{\mathbf{g}} \mathbf{v_4}$$

y dado que el operador integral es un operador lineal:

$$\frac{1}{\mathbf{R}} \int_0^4 \mathbf{M\,dt} - \int_0^4 \mathbf{Fr\,dt} = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{W}}{\mathbf{g}} \mathbf{v_4} \qquad (3)$$

Al sumar (1) y (3) se cancela el impulso lineal producido por la fricción:

$$\frac{1}{\mathbf{R}} \int_0^4 \mathbf{M\,dt} = \frac{3}{2}\frac{\mathbf{W}}{\mathbf{g}} \mathbf{v_4}$$

$$v_4 = \left(\frac{\mathbf{2g}}{\mathbf{3WR}}\right) \int_0^4 \mathbf{M\,dt} \qquad (4)$$

Al evaluar el impulso angular en la ecuación (4) se tiene que:

a) para el par $\mathbf{M_1}$:

$$\int_0^4 \mathbf{M_1\,dt} = \textbf{área bajo la curva } \mathbf{M_1} \textbf{ en } \mathbf{0 \le t \le 4\,s}$$

$$\int_0^4 \mathbf{M_1\,dt} = \mathbf{4\,T_1}$$

al sustituir en (4):

$$v_4 = \left(\frac{\mathbf{2\,g}}{\mathbf{3\,W\,R}}\right) \mathbf{4\,T_1}$$

$$v_4 = \frac{\mathbf{8\,g\,T_1}}{\mathbf{3\,W\,R}} \qquad (5)$$

b) para el par $\mathbf{M_2}$:

$$\int_0^4 \mathbf{M_2\,dt} = \textbf{área bajo la curva } \mathbf{M_2} \textbf{ en } \mathbf{0 \le t \le 4\,s}$$

$$\int_0^4 \mathbf{M_2\,dt} = \mathbf{2\,T_2} + \frac{\mathbf{(4-2)}}{\mathbf{2}} \mathbf{T_2}$$

$$\int_0^4 \mathbf{M_2\,dt} = \mathbf{3\,T_2}$$

al sustituir en (4):

$$v_4 = \left(\frac{\mathbf{2\,g}}{\mathbf{3\,W\,R}}\right) \mathbf{3\,T_2}$$

$$v_4 = \frac{\mathbf{2\,g\,T_2}}{\mathbf{W\,R}} \qquad (6)$$

Al establecer la igualdad entre (5) y (6) se concluye que:

$$\frac{8gT_1}{3WR} = \frac{2gT_2}{WR}$$

$$\boxed{T_1 = \tfrac{3}{4}T_2}$$

Con relación a la fuerza de fricción estática desarrollada entre las superficies de contacto:

¿es igual o diferente en las dos configuraciones?

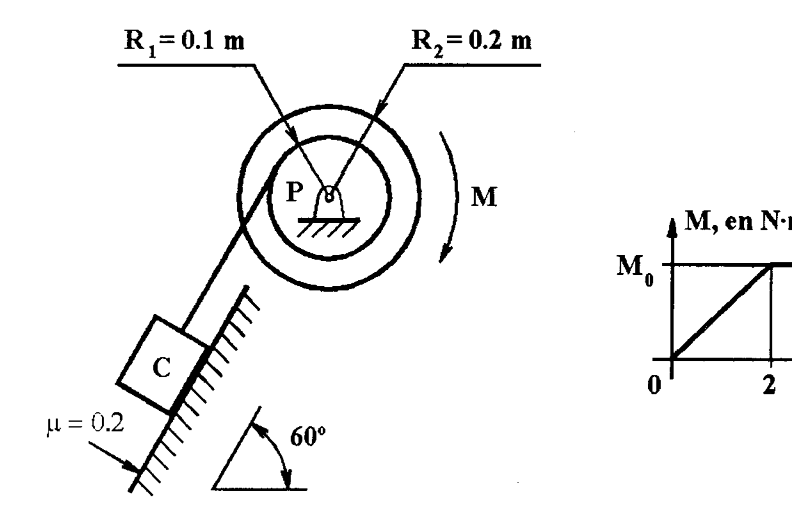
¿la magnitud de la fuerza de fricción es independiente del intervalo de tiempo en el que actúa?

25 Dinámica del cuerpo rígido: método de impulso y cantidad de movimiento

Una polea compuesta **P** con peso $W_P = 150$ N y un radio de giro con respecto a su centro de masa $k_G = 0.106$ m, y un bloque **C** con peso $W_C = 100$ N inicialmente en reposo, se conectan mediante un cable ideal; sobre la polea actúa un par **M** cuyo comportamiento en el tiempo se muestra en la gráfica. Se quiere calcular los valores de M_0 y δ de tal forma que:

a) el bloque descienda en el intervalo $0 \le t < 2$ s y se detenga justamente en $t = 2$ s; y

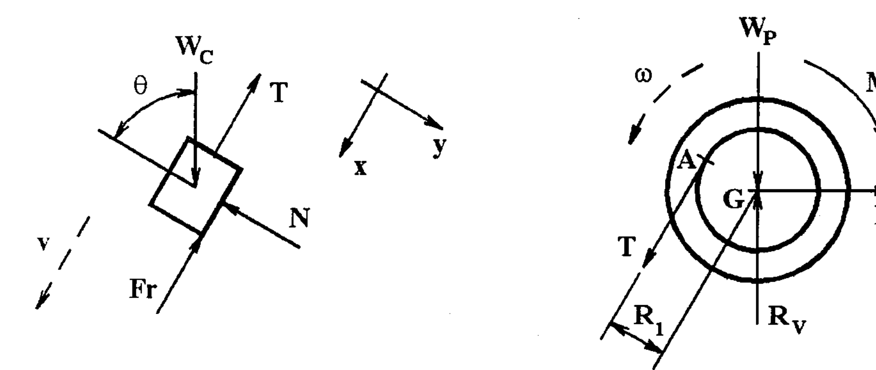
b) el bloque ascienda en el intervalo $2 < t \le \delta$ s y adquiera una rapidez de $v_C = 4$ m/s.



Diagramas de cuerpo libre en $0 \le t \le 2$ s:

el bloque C en el descenso

la polea gira en sentido antihorario



Ecuación de impulso y cantidad de movimiento lineal para el bloque **C**, considerando **t** de tal forma que $0 \le t < 2$ s:

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_x \, dt = m(v_2 - v_1)$$

$$\int_0^2 (W_C \operatorname{sen}\theta - \mu N - T)dt = \frac{W_C}{g}(v_2 - 0)$$

Dado que $N = W_C \cos\theta$, al sustituir esta expresión y considerando que el operador integral es lineal, se puede expresar la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$W_C(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta)\int_0^2 dt - \int_0^2 T\,dt = \frac{W_C}{g}v_2$$

$$2\,W_C(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - \int_0^2 T\,dt = \frac{W_C}{g}v_2 \qquad (1)$$

Ecuación de impulso y cantidad de movimiento angular para la polea **P**, considerando el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 2$, s:

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma M\,dt = I_{GG}(\omega_2 - \omega_1)$$

$$\int_0^2 (T R_1 - M)\,dt = \frac{W_P}{g}k_G^2(\omega_2 - 0)$$

al dividir entre R_1 y distribuir el operador integral en el primer miembro:

$$\int_0^2 T\,dt - \frac{1}{R_1}\int_0^2 M\,dt = \frac{W_P\,k_G^2}{g R_1}\omega_2 \qquad (2)$$

al sumar (1) y (2) miembro a miembro, se cancela el impulso producido por la tensión **T**:

$$2\,W_C(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - \frac{1}{R_1}\int_0^2 M\,dt = \frac{W_C}{g}v_2 + \frac{W_P\,k_G^2}{g R_1}\omega_2 \qquad (3)$$

En la ecuación (3) se puede relacionar cinemáticamente v_2 con ω_2; de la rotación de la polea se tiene para cualquier instante, que en el punto **A** se cumple:

$$v_C = v_A;$$

$$v_A = \omega R_1$$

por consiguiente:

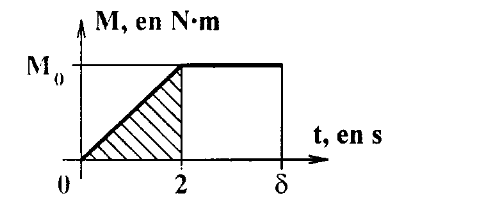
$$v_2 = \omega_2 R_1$$

Al despejar ω_2 de esta expresión y sustituirla en (3):

$$2\,W_C(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - \frac{1}{R_1}\int_0^2 M\,dt = \frac{v_2}{g}\left(W_C + \frac{W_P\,k_G^2}{R_1^2}\right) \qquad (4)$$

y dado que:

$$\int_0^2 M\,dt = \text{área bajo la curva en el intervalo } 0 \leq t \leq 2 \text{ s}$$



$$\int_0^2 M\,dt = \frac{(M_0)(2)}{2}$$

$$\int_0^2 M\,dt = M_0$$

Las condiciones del problema son tales que para $\mathbf{t = 2\ \ s,\ \ v_2 = 0\ \ m/s,}$ por lo que al sustituir el impulso del par **M** y los datos de los parámetros del sistema en (4):

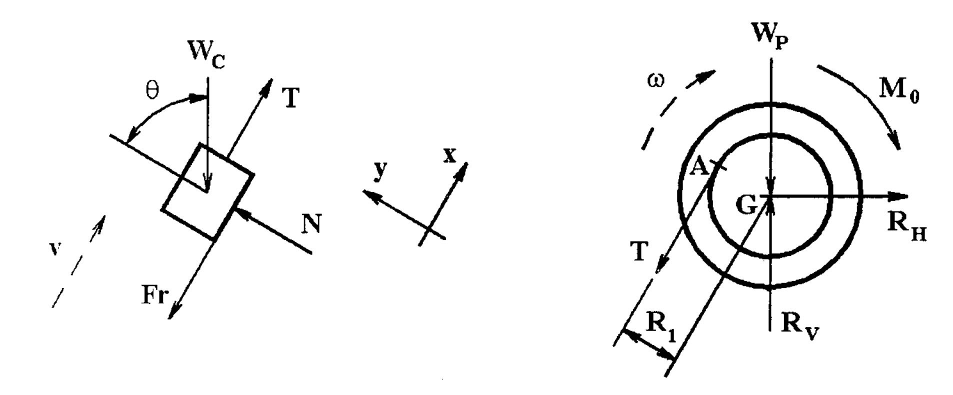
$$2(100)(0.866-0.2\times0.5)-\frac{1}{0.1}M_0=0$$

$$\boxed{M_0 = 15.32\ \ N\cdot m}$$

La segunda condición implica que se tengan los siguientes diagramas de cuerpo libre, en el intervalo $2 \le t \le \delta$ s:

el bloque C en ascenso

la polea con rotación horaria



Procediendo de manera semejante al caso anterior, las ecuaciones de la cantidad de movimiento, tanto para el bloque como para la polea en el intervalo $\mathbf{2 \le t \le \delta}$ quedan:

$$\int_2^\delta T\,dt - W_C(\operatorname{sen}\theta+\mu\cos\theta)\int_2^\delta dt = \frac{W_C}{g}v_\delta \tag{5}$$

$$\frac{1}{R_1}\int_2^\delta M\,dt - \int_2^\delta T\,dt = \frac{W_P\,k_G^2}{g\,R_1}\omega_\delta \tag{6}$$

y al sumar (5) y (6) miembro a miembro, queda:

$$\frac{1}{R_1}\int_2^\delta M\,dt - W_C(\operatorname{sen}\theta+\mu\cos\theta)\int_2^\delta dt = \frac{v_\delta}{g}\left(W_C+\frac{W_P\,k_G^2}{R_1^2}\right) \tag{7}$$

Las condiciones son tales que, para $\mathbf{t = \delta\ \ s,\ \ v_\delta = 4\ \ m/s;}$ por otro lado, el impulso producido por el par M en este intervalo es:

$$\int_2^\delta M\,dt = \textbf{área bajo la curva en el intervalo } 2\le t\le\delta\ s$$

$$\int_2^\delta M\,dt = (\delta-2)M_0$$

$$\int_2^\delta M\,dt = 15.32(\delta-2)\,N\cdot m\cdot s$$

y al sustituir este valor y los datos del sistema en (7):

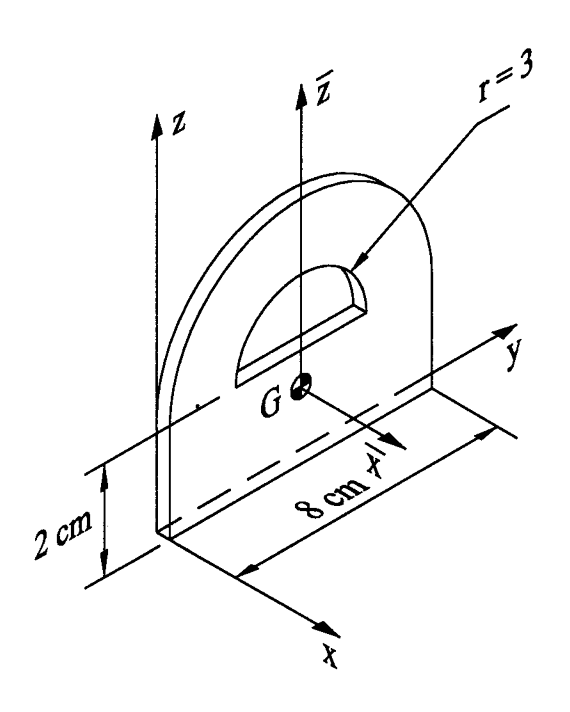
$$\frac{15.32}{0.1}(\delta-2)-100(0.866+0.2\times0.5)(\delta-2)=\frac{4}{9.8}\left[100+\frac{(150)(0.106)^2}{(0.1)^2}\right]$$

$$56.6(\delta-2)=109.6$$

$$\boxed{\delta = 3.94\ \text{s}}$$

SERIE IX

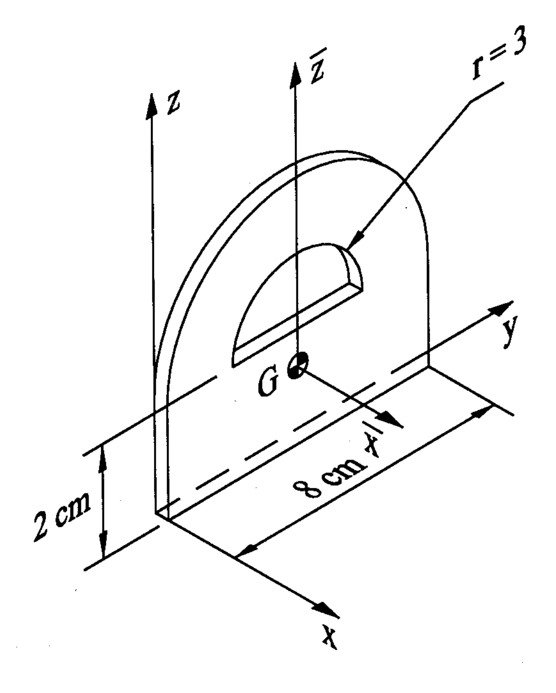
CENTROS DE MASA Y MOMENTOS DE INERCIA



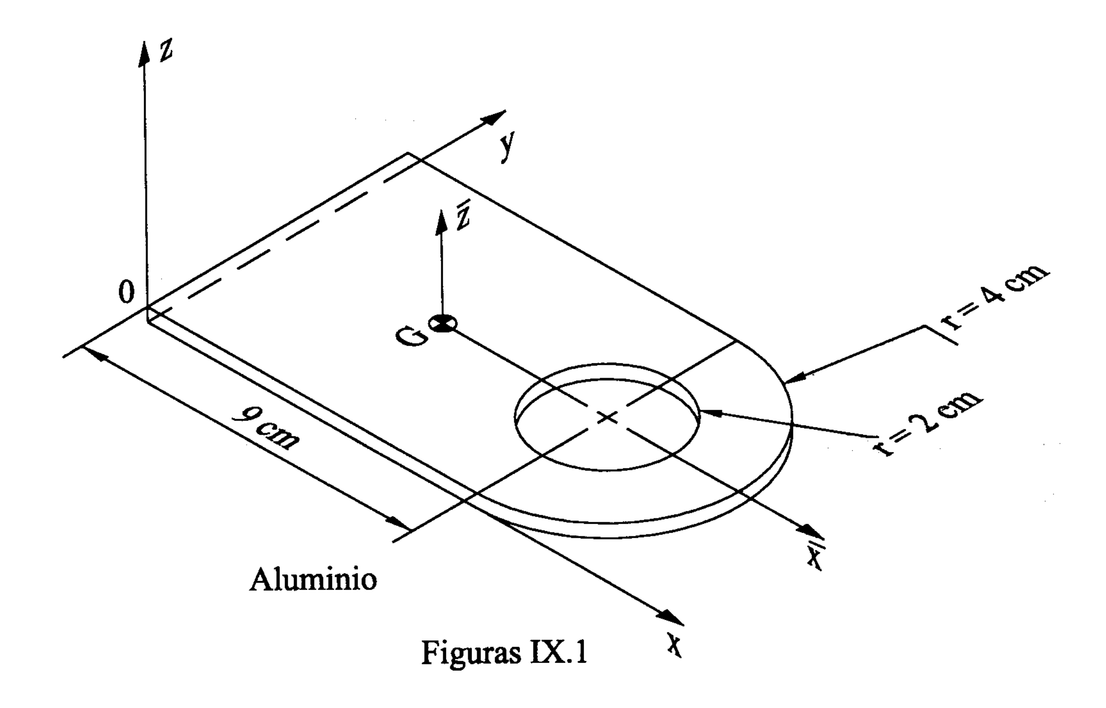
IX.1.-Las placas que se muestran, tienen 1 cm de espesor; la primera es de acero con una densidad ρ = **8 g/cm^3**, mientras que la segunda es de aluminio con una densidad ρ = **3 g/cm^3**. Obtenga para cada una de ellas:

a).-la masa, y


b).-el centro de masa.



Acero



Aluminio

Figuras IX.1

IX.2.-Con relación al problema anterior, las placas se unen como se muestra en la figura; obtenga el centro de masa del conjunto.

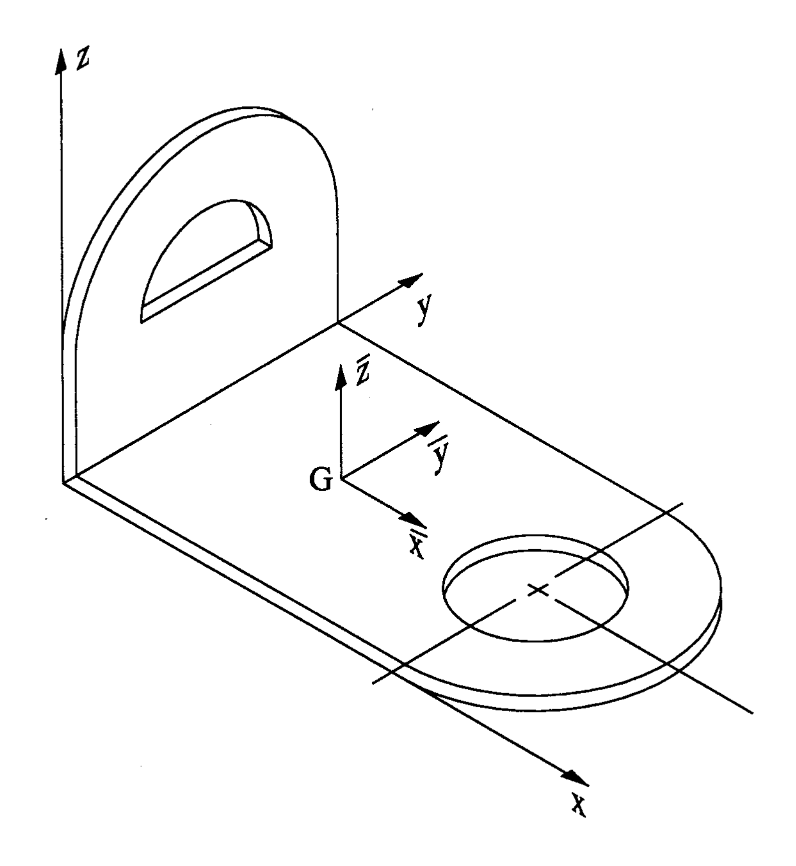


Figura IX.2

IX.3.-Con relación al problema IX.1, obtenga los momentos de inercia $\mathbf{I_x}$ e $\mathbf{I_z}$ centroidales de cada placa.

IX.4.- Con relación al problema IX.2, obtenga los momentos de inercia $\mathbf{I_x}$ e $\mathbf{I_z}$ centroidales del sistema .

IX.5.-Una polea de aluminio de **20 cm** de radio, **3 cm** de espesor y **10 kg** de masa, tiene incrustado un perno de acero, como lo muestra la figura, logrando con ello que su centro de masa se encuentre ubicado en **C (0.625, 0) cm**. Dado que no es posible extraer el perno y que la polea se empleará como rotor, se requiere que su centro de masa se reubique en su centro geométrico; el técnico rectificador sugiere que se practique un agujero de **3 cm** de radio en el punto **M**.

Para la posición mostrada, determine la distancia **"d"** en donde se debe barrenar, para lograr que el centro de masa coincida con el centro geométrico. En caso de que no sea posible, esgrima las razones que correspondan.

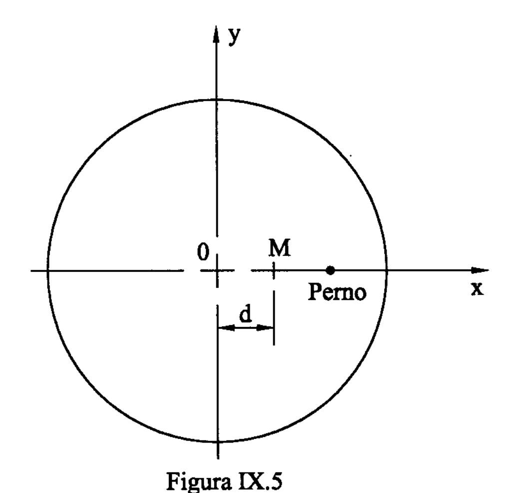


Figura IX.5

IX.6.-Con relación al problema anterior, una solución práctica sugiere fijar una pequeña polea de plomo de **1 cm** de espesor a **10 cm** de distancia del centro "O", como se muestra en la figura; si la densidad del plomo es $\rho = 11$ ton/m^3, obtenga el radio **"r"** de la polea de plomo, con el fin de lograr tal propósito.

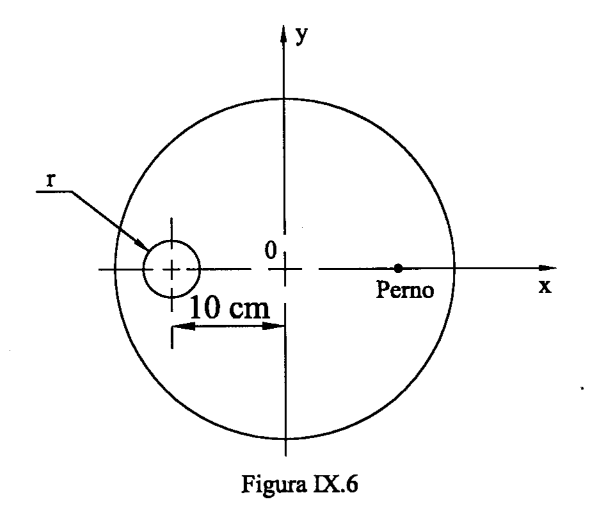
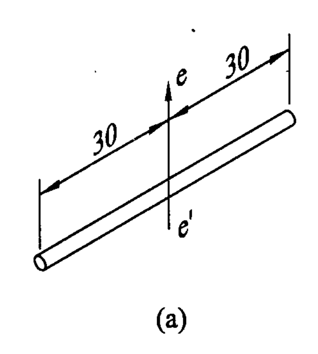
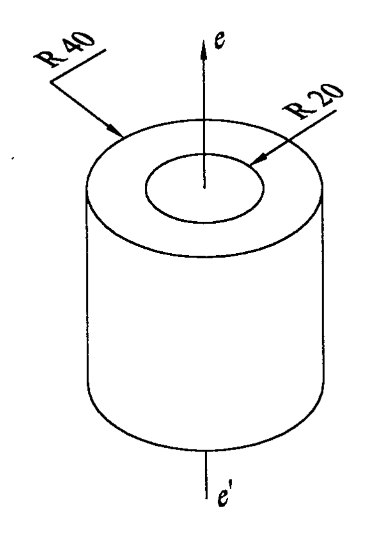


Figura IX.6

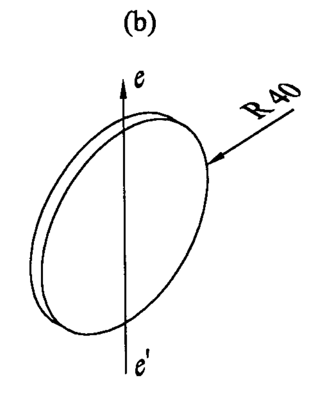
IX.7.-Los tres cuerpos que se indican en la figuras (a), (b) y (c) tiene igual momento de inercia con respecto al **eje ee'**. Obtenga la proporción de sus masas.



(a)



(b)



(c) Dimensiones, en cm

Figuras IX.7

IX.8.-La polea compuesta que se muestra en la figura, tiene un momento de inercia con respecto al eje **ee'** de **0.32 kg m²**; considerando que la densidad del material con la que está construida es ρ = **4 g/cm³**, $\mathbf{r_1}$ = **10 cm** y el espesor de cada polea es de **3 cm**, determine:

a).-la masa de cada polea, y

b).-el radio r_2.

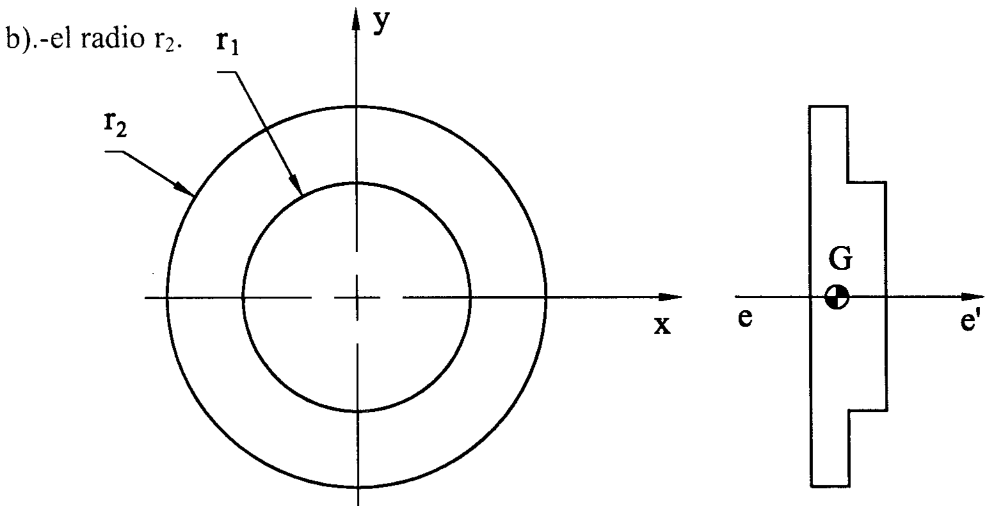


Figura IX.8

IX.9.-El tambor de cobre que se muestra tiene una masa de **3054.5 g** y las dimensiones que se muestran. Si ρ = **8.92 x 10³ kg/m³**, determine:

a).-el radio R del tambor, y

b).-el radio de giro del tambor con relación al eje ee'.

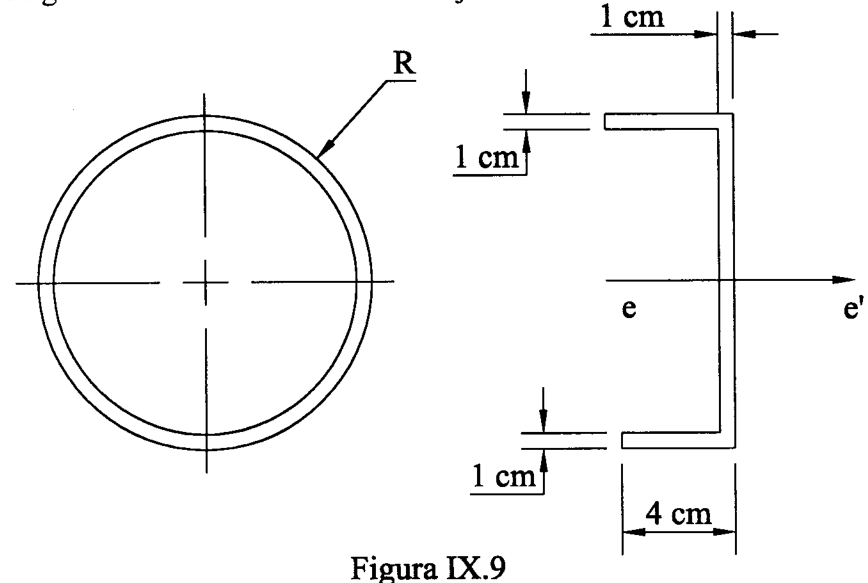


Figura IX.9

IX.10.-A una polea de masa **M**, radio **R**, espesor **e** y densidad ρ, se le practicaron cuatro perforaciones circulares, tal como se muestra. Si **d = 0.25R**, demuestre que el momento de inercia respecto a un eje centroidal perpendicular a la superficie de la polea, está dado por:

$$\mathbf{I = (55/96)\,MR^2}, \qquad \text{donde } \mathbf{M = 0.75\pi R^2 \rho e}$$

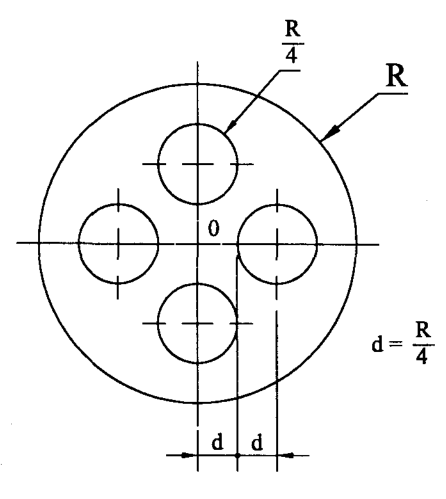


Figura IX.10

IX.11.-Dos barras homogéneas y delgadas del mismo material e igual diámetro, se sueldan como se observa en la figura. Sean dos ejes **mm'** y **nn'**, perpendiculares al plano donde se encuentran las barras y que pasan por los puntos **"O"** y **"G"**, respectivamente. Si **"G"** es el centro de masa, y se consideran los resultados obtenidos en el problema IX.1r, determine:

a).-la proporción que existe entre los momentos de inercia $I_{mm'}$ e $I_{nn'}$

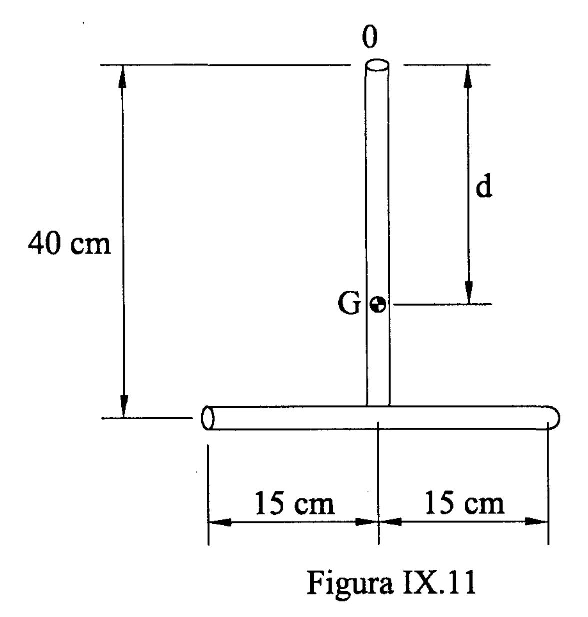


Figura IX.11

IX.12.-La forma aproximada de una biela de motor de combustión interna, corresponde al sistema mostrado, formado por dos cilindros huecos de **3 cm** de altura y una barra sólida de **3 cm** de diámetro. Si la densidad del material es ρ = **4 g/cm^3**, y con base en dicha configuración, determine el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de masa **G** y sea perpendicular al plano mostrado.

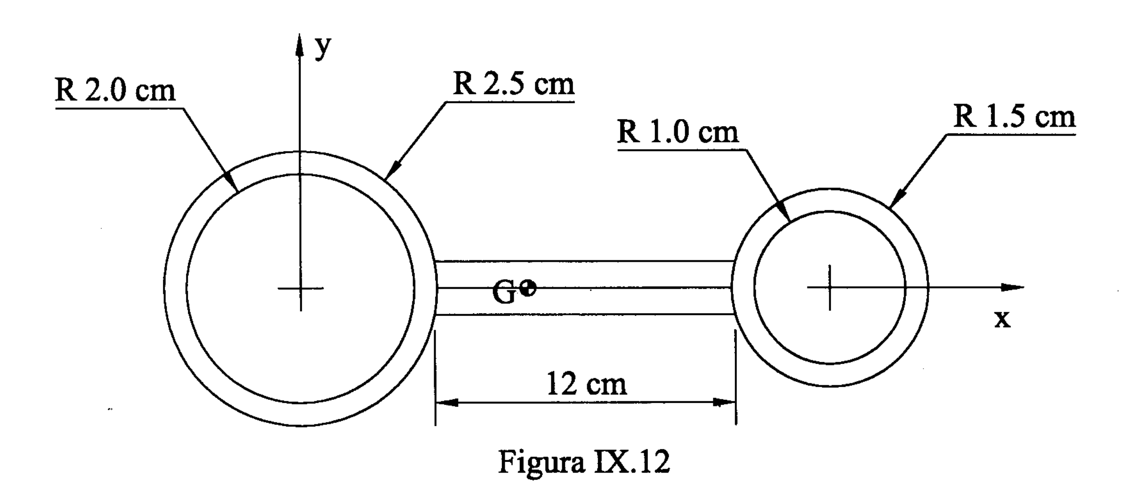


Figura IX.12

IX.13.-.La barra delgada y homogénea que se muestra tiene **10 kg** de masa, y su momento de inercia con respecto al eje LL' vale **0.7 kgm^2**. Obtenga:

a).-la longitud l de la barra, y

b).-el radio de giro de la barra, respecto a un eje paralelo a LL' y que pase por su centro de masa.

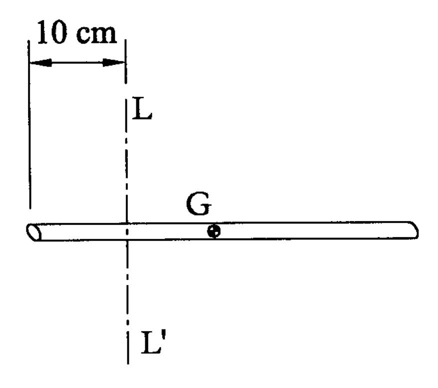


Figura IX.13

IX.14.-El cilindro hueco y la esfera que se muestran, se unen por medio de una barra delgada, como se muestra en la figura; los centros de masa de cada uno de los cuerpos están contenidos en un plano vertical de simetría y sobre una recta horizontal. El sistema está perfectamente equilibrado y balanceado, y apoyado en el pivote "O". Considerando los siguientes datos:

Cilindro	$\mathbf{r_1 = 5\ cm}$,	$\mathbf{r_2 = 8\ cm}$,	$\mathbf{m_c = 4\ kg}$
Barra	$\mathbf{L = 80\ cm}$,	$\mathbf{m_b = 2\ kg}$	
Esfera	$\mathbf{r_e = 6\ cm}$		

Obtenga:

a).-la masa de la esfera,

b).-el momento de inercia del sistema con respecto al eje ee', y

c).-el momento de inercia del sistema con respecto al eje ll'.

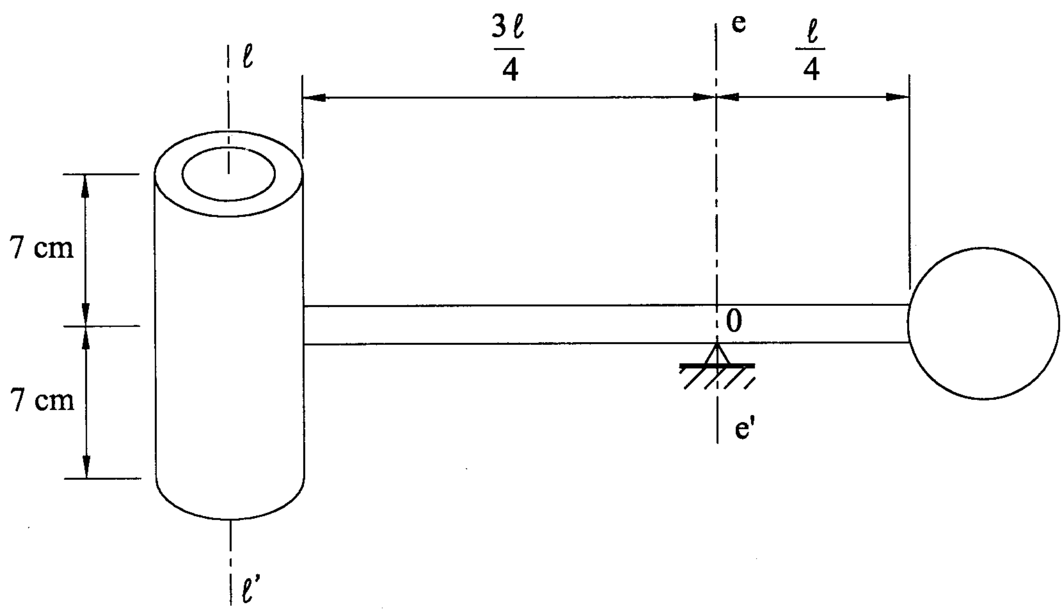


Figura IX.14

IX.15.-El semicilindro homogéneo que se muestra en la figura, tiene masa **M** y su centro de masa **"G"**, se puede localizar de acuerdo a los marcos de referencia y datos indicados. Si **d** = **4r** /3π e $I_x = I_z$, demuestre que el radio **r** y la altura **H** se encuentran relacionadas por la expresión:

$$r = \pi H[\,3/(9\pi^2 - 64)]^{1/2}$$

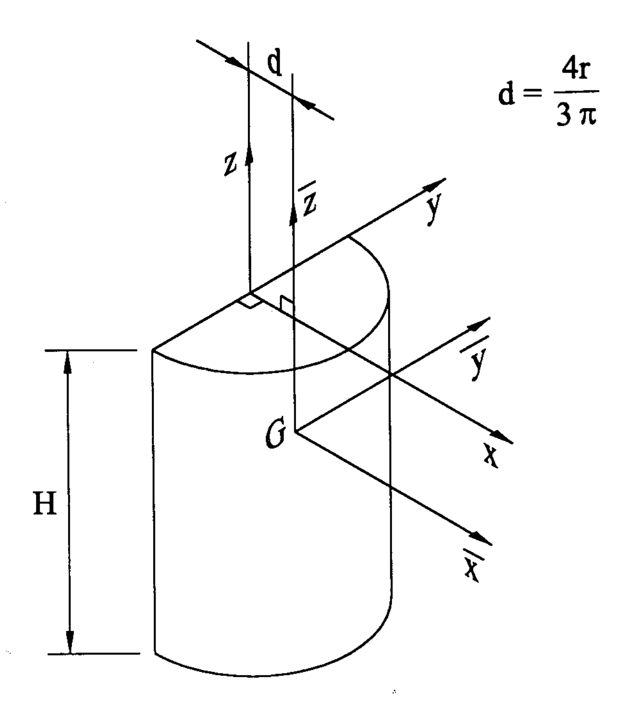


Figura IX.15

IX.16.-Con relación al problema IX.7, considere que las masas de los tres cuerpos son iguales. Obtenga la proporción que deben tener los momentos de inercia con respecto al **eje ee'**.

IX.17.-Se construye un armazón de una raqueta con una varilla delgada, que tiene una masa por unidad de longitud de **4.3 g/cm**, siendo la masa total del armazón **m = 400 g**. Obtenga:

a).-la longitud l,

b).-el centro de masa del armazón, y

c).- I_x e I_y, centroidales.

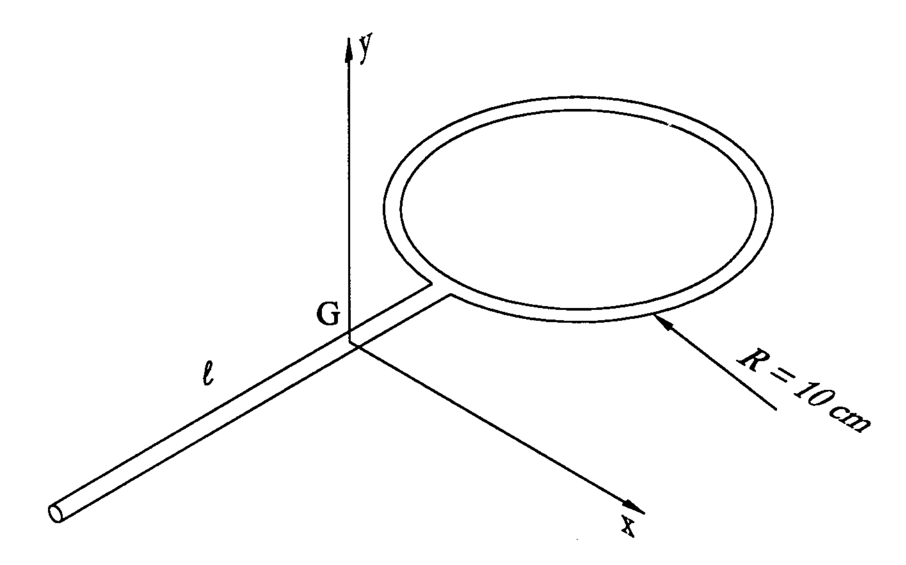


Figura IX.17

26 Obtención del momento de inercia de un cuerpo rígido compuesto

Dos barras homogéneas y delgadas del mismo material e igual diámetro, se sueldan como se observa en la figura. Sea un eje **nn'**, perpendicular al plano donde se encuentran las barras y que pasa por el centro de masa **"G"** . determine:

a).-la posición del centro de masa "G", y

b).-momento de inercia respecto al eje nn'.

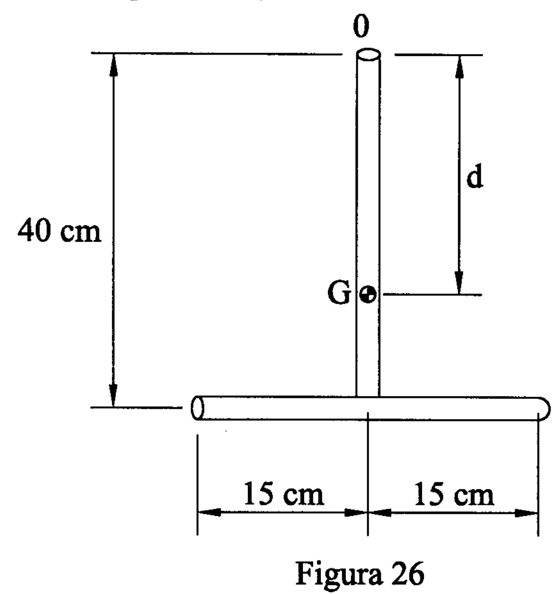


Figura 26

Resolución:

a) Obtención de la posición de "G"

Si **a** es la sección de las barras y ρ la densidad, y para el sistema de referencia propuesto,

	mi	yi	miyi	
	40aρ	**-20**	**-800aρ**	
	30aρ	**-40**	**-1200aρ**	
Σ	**70aρ**		**-2000aρ**	**y = -2000aρ/70aρ**
				d = y = -28.57 cm

b) Obtención de $I_{nn'}$

$$\mathbf{I_1 = 40a\rho\,(40)^2/12 + 40a\rho\,(28.57 - 20)^2 = 8272.1088\ a\rho}$$

$$\mathbf{I_2 = 30a\rho\,(30)^2/12 + 30a\rho\,(40 - 28.57)^2 = 6168.3673\ a\rho}$$

$$\mathbf{I_{nn'} = 14\,440.4761\ a\rho\ \ kgcm^2}$$

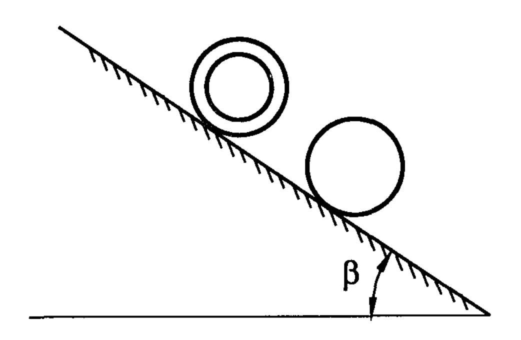
27 Problema de dinámica del cuerpo rígido

Se colocan un cilindro y un aro homogéneos sobre un plano inclinado, tal como se muestra en la figura; las masas y los radios externos son iguales y están fabricados del mismo material y por lo tanto el coeficiente de fricción es el mismo entre el plano y los cuerpos citados. Si después de soltarlos ruedan sin deslizar, determine, justificando su respuesta, si las siguientes aseveraciones son correctas o falsas.

a).-el aro alcanzará al cilindro,

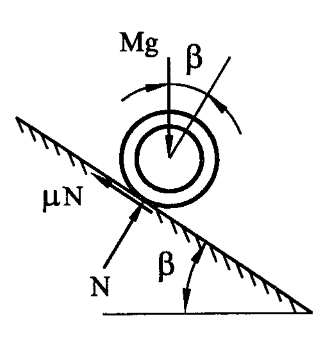
b).-el cilindro macizo se alejará cada vez más del aro, y

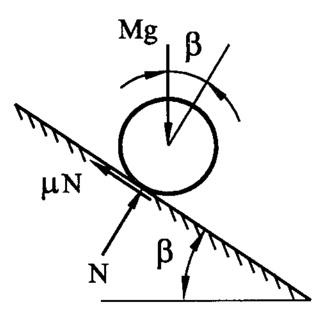
c).-los cuerpos nunca se tocan.



Resolución

D.C.L. **cilindro hueco** **cilindro macizo**





M = masa del cilindro macizo = masa del cilindro hueco

Momento de inercia del cilindro hueco

$\mathbf{I_{cir1} = Mr^2 + Mr^2 = 2\ Mr^2}$

Momento de inercia del cilindro macizo

$\mathbf{I_{cir2} = 0.5\ Mr^2 + Mr^2 = 1.5\ Mr^2}$

Para el cilindro hueco

$\Sigma\ \mathbf{M_{cir} = I_{cir}}\ \alpha_1$

$\mathbf{M\ g\ r\ sen\beta = 2\ Mr^2}\ \alpha_1$ $\qquad$ $\alpha_1 = \mathbf{g\ sen\beta\ /\ 2\ r}$

Para el cilindro macizo

$\Sigma\ \mathbf{M_{cir} = I_{cir}}\ \alpha_1$

$\mathbf{M\ g\ r\ sen\beta = 1.5\ Mr^2}\ \alpha_2$ $\qquad$ $\alpha_2 = \mathbf{g\ sen\beta} / 1..5\ \mathbf{r}$

Como, $\alpha_1 < \alpha_2$ **, el cilindro hueco no alcanzará al cilindro macizo.**

a) **falsa**
b) **verdadera**
c) **verdadera**

RESPUESTAS

SERIE I

I.1.- a).- $\mu = 0.4$
b).- $t = 1.63$ s

I.2.- a).- P = 20 N
b).-W = 18 N

I.3.-$\theta = 21.8°$

I.4.-a).- V = 0 m/s L = 5 m
b).- V = 1.2 m/s L = 6.5 m

I.5.-L = 15.7 m

I.6.-$\mu_2 = 0.8$

I.7.-a).- $h_{máx} = 36.74$ m
b).- V = 16.425 m/s

I.8.-a).- V = 5.6 m/s
b).- F = 2 N
c).- $L_{máx} = 16$ m

I.9.-a).- $V_o = 5$ m/s
b).- H = 1 m

I.10.-L = 1.43 m

I.11.-a).-$\mu = 0.482$
b).- $F_o = 18$ N

I.12.-V = 8.88 m/s

I.13.-X = 7 m
L = 15.6 m

I.14.-$F_o = 41.6$ N

I.15.-a).- $V_{máx} = 10.2$ m/s
b).-L = 13.6 m

I.16.-$\mu = 0.42$

I.17.-El resorte de K_1 , es más duro

I.18.-a).- K = 400 N/m
b).- $\delta = 9.81$ cm
c).- $f = 5/\pi$ ciclos/s

I.19.-Demostración

I.20.-m > 4 kg

I.21.-$D_{min} = 0.215$ m

I.22.-K = 200 N/m
B = 50 Ns/m
$F(t) = 10sen(8\pi)t$

I.23.- K = 40.5 N/m, B = 2 N s / m

SERIE II

II.1.-a).- T = 153.6 N

b).- V_B= 2.56 m/s

II.2.-A, nunca podrá adquirir una velocidad de 5 m/s. Para que A se mueva, T > 8 N y W_B > T, por lo tanto W_B > 8 N

II.3.-a).- P = 540 N

b).- P = 70 N

II.4.-a).-P = 200/3 N

b).-P = 400/3 N

II.5.-a).- V_A = 6.26 m/s

b).- V_A = 3.43 m/s

II.6.-Wc = 300 N

II.7.-a).- V_A = 0 m/s, V_B = 4.9 m/s

b).- V_A = 3 m/s, V_B = 0 m/s

II.8.-μ_A = 0.2

II.9.-a).- F = 2116.46 N

b).- F = 383.54 N

II.10.-a).- N = 602 N

b).- N = 398.06 N

II.11.-P = 394 N

SERIE III

III.1.-A).- c).- T = W

B).- a).- T>W

C).- Porque la cuerda dejaría de actuar, al no estar tensa; por el efecto de W.

III.2.-a).- C = 46.19 N

b).- C = 34.61 N

III.3.-a).- $V_{máx}$ = 12.53 m/s

b).- a = 5.89 m/s^2

III.4.-a).- N = 37.708 N

b).- a = 10.306 m/s^2

c).- decrece, ya que la aceleración tangencial es negativa

III.5.-V = 2.2147(L)$^{1/2}$

a = g

III.6.-a).- T = 40 N

b).- ϕ = 60°

III.7.-a) ω = 4.345 rad/s

b).- T = 23.09 N

III.8.- 6.214 < ω < 18.45 rad/s

III.9.-a).- V = 2.426 m/s

b).-L = 0.6 m

III.10.-a).- V_o = 6.66 m/s

b).- a = 9.0 m/s^2

III.11.- ω > 9.65 rad/s

III.12.-Demostración

III.13.-θ = 24.54°

III.14.- a).- ω = 17.15 rad/s, W_1 tiende a alejarse del centro del disco
b).-los bloques no se mueven con respecto al disco
c).- ω = 9.9 rad/s, W_2 tiende a alejarse del centro del disco

III.15.- H = (2/3) R

III.16.-a).-$a_t = g\cos\theta$
b).-$a_n = 2g (\mathrm{sen}\theta - \mathrm{sen}\theta_o)$
c).- $N = W (3\ \mathrm{sen}\theta - 2\mathrm{sen}\theta_o)$

III.17.–**Demostración**

III.18.-a).-1.0488 s
b).-V = 2.72 m/s

111.19.-$d^2\theta/dt^2 + 2dr/dt\ (d\theta/dt)/r = g\ (\cos\theta)/r$
$d^2r/dt^2 - r\ [\ (d\theta/dt)^2 + kg/w\ ] = g\ \mathrm{sen}\theta$

III.20.- a).-$T = W \{ \mathrm{sen}\theta + [a\ d^2\theta/dt^2 + l\ (d\theta/dt)^2 - a\ \theta\ (d\theta/dt)^2\ ]/g \}$
b).- $d^2\theta/dt^2 + \theta\ (d\theta/dt)^2 = -(l + g \cos\theta)/a$

III.21.-a).- Demostración
b).-$Vol = (l - a\ \theta)^2\ d\theta/dt$, y
$T = W\ [\ Vo^2 l^2 / (l\text{-}a\ \theta) + a\ d^2\theta/dt^2\ ] /g$

III.22.-a).-Demostración
b).- $v = [\ (dr/dt)^2 + v_o^2\ l^2 /r^3\ ]^{1/2}$

SERIE IV

IV.1.-a).-$\delta_{máx}$ = 8.3 cm
b).-EC = 25 J

IV.2.-a).-V = 5.94 m/s
b).-U_k = 157.86 J

IV.3.- V = 2.1 m/s

IV.4.-V = 3.03 m/s

IV.5.-a).- $\delta_{máx}$ = 20 cm
b).- $V_{máx}$ = 0.63 m/s

IV.6.-P = 460 N
V_A = 0.64 m/s

IV.7.-a).- W = 20 N
b).-V_B = 4.43 m/s
c).- a = 13 m/s^2

IV.8.- P = W
a).- $\theta = \pi/4$
b).-N = 2.24 W

IV.9.-a).- $EC = WL(\mathrm{sen}\theta - \mathrm{sen}\theta_o)$
b).- $T = W\ (3\mathrm{sen}\theta - 3\mathrm{sen}\theta_o)$

IV.10.-La cuerda se rompe
a).-θ = 41.81°, V = 9.12 m/s

IV.11.-δ = 0.153 m

IV.12.-a).-h = 1.5 m
b).- N_c = 140.05 N

c).-a = 58.89 m/s^2

d).- a = g m/s^2

IV.13.-a).-V_1 = 6.51 m/s

b).-N_2 = 18.3 N

IV.14.-10 < δ < 11.88 cm

IV.15.-a).- μ = 0.53

b).- a = 8.7 m/s^2

c).-R = 319.62 N

IV.16.-Ambas partículas tienen la misma variación de energía cinética, respecto a la que tenían al ser lanzadas.

IV.17.-a).- el trabajo desarrollado tiene la misma magnitud, U = 7x, siguiendo cualquier rampa.

b).- U = 7x

IV.18.-a).- V_A = 2.74 m/s

b).- d = 2.06 m

IV.19.- a).-V = 1.4 m/s

b).- d = 0.36 m

SERIE V

V.1.-a).-V = 20.4 m/s

b).-t = 4 s

V.2.-a).-F_o = 27.2 N

b).-V_o = 8.63 m/s

V.3.-a).- F t = 4i N s

b).- V = 2i m/s

V.4.a).- m V = 4.56 kg m/s

b).- t = 6.28 s

V.5.-V = 2 m/s, a la izquierda

V.6.-a).-V = 3.97 m/s

b).-V = 6.18 m/s

c).- t = 8.1 s

V.7.-a).-F_o = 66 N

b).- m V = 39.6 Kg m/s

V.8.-a).- P_o = 4058.5 N

b).- F t = 40.58 N s

c).- V = 19.81 m/s

V.9.-a).- Vo = 2 m/s

b).- V_B = 1.56 m/s

c).- T_B = 92.38 N

d).- μ = 0.4

SERIE VI

VI.1.-m_1 = 2 kg, m_2 = 4 kg, m_3 = 6 kg y m_4 = 8 kg

VI.2.-r_c = -2.79i + 4.14j - 0.94k m
v_c = -6i + 8j -1.81k m/s
a_c = -6i +8j -1.81k m/s^2

VI.3.-a).- r_c = -1.8i + 3.9j +1.5k m
b).- v_c = 1.6i - 1.7j + 0.2k m/s
c).- a_c = 0.1i +0.8j - 0.5k m/s^2
d).- mV = 16i -17j + 2k kg m/s

VI.4.-a).-v_3 = 4.67 m/s θ_y = 64.64°
b).-d = 1.649 m

VI.5.-a).- F_B = 18.49 N
b).- M_Q = 79.94 N m

VI.6.-a).-m_3 = 3 kg
b).-d = 0.6 m, e = 0.5 m
c).-v_1 =2i + 4j +5k m/s
d).-mV = 11i + 32j + 21k kg m/s

VI.7.-a).-v_c = 7.21 m/s y v_B = 10.39 m/s
b).-I_c = 0.24 kg m^2

VI.8.-a).- m_1 = 0.433 kg, m_2 = 0.4 kg y m_3 = 0.167 kg
b).-.α = 3 rad/s^2, en sentido antihorario
c).-H_c = -150k N cm

VI.9.-a).-EC_c = 209.33 N m
b).-EC_{relcm} = 284.67 N m
c).-EC_{sis} = 493.99 N m

VI.10.-a).-EC_{sis} = 217 N m
b).-H_c = -3.4i + 8.1j - 4.8K kg m^2 /s

VI.11.-a).-EC_{sis} = 5.144 N m
b).-EC_{relcm} = 2.5129 N m
c).-EC_c = 2.6312 N m

VI.12.-a).-m_A = 0.4 kg
b).-H_c = -0.096 k kg m^2/s
c).-v_A = -0.1i - 0.2j m/s ; v_B = -1.3i-0.2j m/s
d).- H_c = -0.096 k kg m^2/s

VI.13.-v_o = 5.425 m/s

VI.14.-θ_A = 30° ; 25% de energía perdida

VI.15.-δ = 0.1038 m

VI.16.-a).-V_{2A} = 2.12 m/s,V_{2B} = 2.77 m/s
b).- V_{2A} = 0.8 m/s V_{2B} = 3.2 m/s

VI.17.-demostración

VI.18.-a).-b = 0.162 m
b).- 0.0817 < b < 0.2417 m
c).- 33% de energía perdida

VI.19.-a).- d = 0.70 m
b).- Vp = 6.19 m/s

SERIE VII

VII.1.-a).- b = 0.30 m
b).-a = 0
VII.2.-a).- N_D = 66.56 N N_T = 15.36 N
b).- a = 1.61 m/s^2
VII.3.-El fenómeno no se presenta
VII.4.-a).- Po = 300 N b*
b).- t = 8.67 s
VII.5.-a).-Fo = 30 kN **b***
b).- $V_{máx}$ = 63.77 m/s
b).Ft = 75 kN s
VII.6.-a).- a = 8.5 m/s^2 θ_x = -60°
b).- T_1 = 7.5 N T_2 = 12.5 N
VII.7.-a).- R_A = R_B = 63.95 N
b).-a = -21.73 i – 22.36 j m/s^2
VII.8.-a).-P = 160 N
b).-a = 5.89 m/s^2
VII.9.-ω= 64.103 rad/s
VII.10.-h = 1.54 m
VII.11.-a).- h = 0.27 cm a*
b).- O_y = 2.5 W
VII.12.- a).- M_o = 320/π N m a*
b).- R_N = 50 N, R_T = 151.55 N
VII.13.-a).- K = 103.9 a*
b).- A_Y= 124.54 k N A_x = 4.95 kN
VII.14.-W = 56.3 N
VII.15.-a).- α = 19.62 rad/s^2
b).-F = 88 N
VII.16.-P = 1504.4 N
VII.17.-a).- M =184 N m
b).- f_r = 720 N
VII.18.-a).- α = 0.156 rad/s^2
b).- R_A = 50.17 N, R_B = 18.44 N
VII.19.-P = 395.23 N
VII.20.- a).- α = 5.51 rad/s^2
b).- T = 51.46 N
c).- μ = 0.312
d).-W_B = 48.72 N
VII.21.- P = 1249.85 N a*
VII.22.-F = 280.78 N b*

SERIE VIII

VIII.1.- a).-V = 2.07 m/s

b).-X = 0.3 m

VIII.2.-a).- $V_o = (Wg / K)^{1/2}$ a/(b-2h) m/s

b).- $\delta_{máx} = V_o (W / gK)^{1/2}$ m

c).- $V = V_o$ m/s

VIII.3.-a).- $\delta = 0.2$ m

b).-L = 0.3 m

c).-V = 1.534 m/s

d).- no se presenta el fenómeno

VIII.4.-a).- el bloque comprime al resorte

b).- dado que se requiere $\delta_{máx}$ = 0.15 m para no volcar, y para $\delta = 0.10$ m, vuelca, sólo se puede presentar este último fenómeno.

c).- el bloque comprime al resorte 0.10 m y vuelca

VIII.5.-$V^2_A = [\, 8\, W_A R^2 - K\, S_A r^2 \,]\, g\, S_A / 4\, (R^2 W_A + K^2 c\, W_p)$ m/s

VIII.6.-a).- $\omega = 3.43$ rad/s

b).- $\omega = 1.98$ rad/s

VIII.7.-a).-$\delta = 8.86$ cm

b).- $\theta = 4.66$ vueltas

c).-Vc = 4.46 m/s

VIII.8.-a).- W =100 N

b).-V_c =1.58 m/s

VIII.9.-).- Ic = 0.5 kg m^2

b).- $f_r = 37.73$ N

VIII.10.-W_B = 53.09 N

VIII.11.-a).- $V_a = (gh)^{1/2}$ m/s, $V_p = (4gh/3)^{1/2}$ m/s

b).-$EC_a = mV_{CA}^2$ Nm, $EC_c = 0.75\, mV_{cp}^2$ Nm

c).-$sen\alpha/sen\beta = (4/3)^{1/2}$

VIII.12.-a).- $M_o = 100$ N m

b).- V = 3.92 m/s

c).- T = 40 N

VIII.13.-a).- $\omega = 22.07$ rad/s

b).- $\omega_{máx} = 36.79$ rad/s en t = 3 s

VIII.14.-a).-mVc = 82.45 kg m/s

b).- $I\omega = 6.18$ kg m^2/s

c).- Ft = 67.55 N s

SERIE IX

IX.1.-a).-m_{ac} = 215.96 g , m_{al} = 253.70 g

b).- C_{ac} (0.5, 4, 2.32) cm , C_{al} = (5.67, 4, 0.5) cm

IX.2.- C (3.83, 4, 1.34) cm

IX.3.- Placa de acero: Ix = 1930.64 g cm^2 Iz = 1239.78 g cm^2

Placa de aluminio Ix = 1403.33 g cm^2 Iz = 4702.44 g cm^2

IX.4.- Ix = 3720.39 g cm^2 Iz = 9195.95 g cm^2

IX.5.- No se puede lograr "balancear" a la polea con un agujero, sino con otro peso estratégicamente colocado en el extremo opuesto.

IX.6.-r = 4.25 cm

IX.7.-M_B / M_C = 3.33 **M_B / M_D = 1.33** **M_D / M_C = 2.5**

IX.8.-a).-m_1 = 3.77 kg m_2 = 15.08 kg

b).-r_2 = 20 cm

IX.9.-R = 7.18 cm **$k_{ee'}$ = 6.59 cm**

IX.10.-Demostración

IX.11.-a).-I_{mm} /I_{nn} = 4.96

IX.12.-I_G = 13 075.215 g cm^2

IX.13.-a).- L = 0.6 m

b).-k_G = 0.173 m

IX.14.-a).-m_E = 12 kg

b).-$I_{ee'}$ = 2.88 kg m^2

c).-$I_{ll'}$ = 11.21 kg m^2

IX.15.-Demostración

IX.16.-I_C = 3.33 I_B I_C = 2.5 I_D I_D = 1.33 I_B

IX.17.-a).- l = 30.19 cm

b).- 32.05 cm, a partir del extremo inferior del mango de la raqueta

c).- Ix = 78. 59 kg cm^2 Iy = 92.10 kg cm^2

a*.-Se sugiere resolver los ejercicios empleando también los conceptos de trabajo y energía.

b*.- Se sugiere resolver los ejercicios empleando también los conceptos de impulso y cantidad de movimiento.

Esta obra se terminó de imprimir
en abril de 2003
en el taller de imprenta del
Departamento de Publicaciones
de la Facultad de Ingeniería,
Ciudad Universitaria, México, D.F.
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 500 ejemplares
más sobrantes de reposición.